$f(x) = (1-2x)^3$ $\quad f(0)=1$

$f'(x) = 3(1-2x)^2 \cdot (-2)$ $\quad f'(0) = -6$

$f''(x) = -6 \cdot 2 \cdot (1-2x)^1 \cdot (-2)$ $\quad f''(0) = 24$

$f'''(x) = 24 \cdot (-2)$ $\quad f'''(0) = -48$

14(15).jan.9.Vizsga.Matematika.1.

1. 3 • Legyen $f(x) = (1-2x)^3$! Szamold ki f harmadrendu Taylor-polinomjat az $x = 0$ pont korul!

$1 - 6x + 12x^2 - 8x^3 = f(x) = T_3(x) \qquad = 1 - 6x + \frac{24}{2!}x^2 - \frac{48}{3!}x^3$

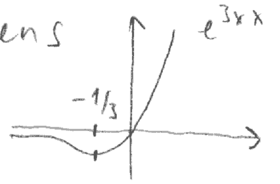
Nemcsak $\approx$, Mivel $f(x)$ egy harmadfokú polinom

3 • Milyen x ertekekre konvergens a kovetkezo sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n^3}$$

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\left(\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)^3}\right) \Big/ \left(\frac{3^n x^n}{n^3}\right)\right|$

$= \left|3x \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^3\right| \xrightarrow{n\to\infty} |3x|$. ha $|3x| < 1$, akkor a sor konvergens



4 • Keresd meg az $f(x) = e^{3x}x$ fuggveny szelsoertekeit es hatarozd meg azok tipusat! Rajzold le $f(x)$-et!

$f' = 3e^{3x} \cdot x + e^{3x}$
$= e^{3x}(3x+1)$

$f' = 0 \longrightarrow 3x + 1 = 0 \longrightarrow x_1 = -\frac{1}{3}$

$f'' = 3e^{3x}(3x+1) + e^{3x} \cdot 3 = e^{3x}(9x+6)$

$f''\left(-\frac{1}{3}\right) = e^{3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}\left(9\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+6\right) > 0$ Max

2. Szamold ki a kovetkezo fuggvenyek derivaltjait!

2 • $\left[\ln(-x)\cos(3x)\right]' = \frac{1}{-x}\cdot(-1)\cdot\cos(3x) + \ln(-x)\cdot(-\sin(3x))\cdot 3$

2 • $\left[\cos(x^3+1)^2\right]' = \left(-\sin(x^3+1)^2\right)\cdot\left(2\cdot(x^3+1)\right)\cdot 3x^2$

2 • $\left[\sqrt[3]{8x^3} + \frac{1}{(3x)^4} + \ln(2x)\right]' = \sqrt[3]{8}\cdot 1 + (-4)\cdot(3x)^{-5}\cdot 3 + \frac{1}{2x}\cdot 2$

2 • $\left[\frac{\cos(2+4x)}{\operatorname{ctg}(x+1)}\right]' = \frac{-\sin(2+4x)\cdot 4\cdot \operatorname{ctg}(x+1) - \cos(2+4x)\cdot \frac{-1}{\sin^2(x+1)}}{(\operatorname{ctg}(x+1))^2}$

2 • $\left[\sqrt{\sin(-2x+2)}\right]' = \frac{1}{2}\cdot(\sin(-2x+2))^{-1/2}\cdot\cos(-2x+2)\cdot(-2)$

3. 4 • Oldd meg a Gauss-elimináció segítségével a következő egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ 3x - y - z &= 3 \\ -2x - y + 2z &= -2 \end{aligned}$$

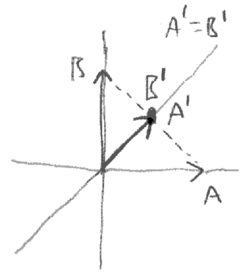
$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{III \to \\ III + 2\cdot I}]{\substack{II \to \\ II - 3\cdot I}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$

$z = 0,\ y = 0$
$x = 1$

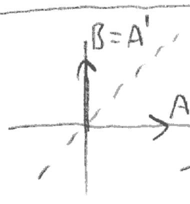
3+3 • Add meg $\mathbb{R}^2$-nek a következő transzformációit leíró mátrixokat:

a) – az $y = x$ egyenesre való merőleges vetítés.

– az $y = x$ egyenesre való merőleges tükrözés.



a) $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix},\ V = \begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix}$



$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

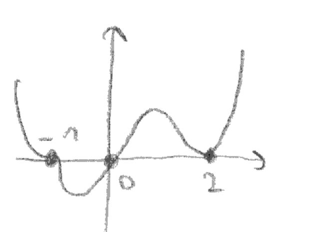
$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

$T = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

4. 3 • Rajzold le a kovetkezo polinomot: $p(x) = (x+1)^3 x(2-x)^2$! $= x^6 + \ldots$

gyök: $-1,\ 0,\ 2$

mult: 3, 1, 2



4 • $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j}$ $= (1,1,0)$, $\bar{b} = \bar{j} - \bar{k}$ $= (0,1,-1)$

Mennyi $\bar{a}\bar{b}$? $\quad \bar{a}\bar{b} = 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) = 1$

Mennyi $\bar{a}\times\bar{b}$? $\quad \begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} = -\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$

Mennyi $\bar{a}$ és $\bar{b}$ közrezárt szöge? $\quad \cos\alpha = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} \longrightarrow \alpha = 60^\circ$

Mennyi a $\bar{a}$ és $\bar{b}$ által kifeszített paraleogramma területe? $\quad T_\square = |-\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}| = \sqrt{3}$

3 • Legyen $z = -125i$. Szamitsd ki $\sqrt[3]{z}$ trigonometrikus alakjat!

$= 125\cdot(\cos 270^\circ + i\cdot\sin 270^\circ)$

$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{125}\cdot\left[\cos\left(\frac{270^\circ}{3} + k\cdot 120^\circ\right) + i\cdot\sin\left(\frac{270^\circ}{3} + k\cdot 120^\circ\right)\right],\ k = 0, 1, 2$

$w_1 = 5\cdot(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ)$, $w_2 = \ldots 210^\circ \ldots$, $w_3 = \ldots 330^\circ \ldots$

$= 5i$