Mintafeladatok, Lin.Alg.Gyak. ZH.

1. Legyen $a = i + 2j + 3k,\ b = 2i + k,\ c = 3i + j + 5k.$

   Mennyi $ab,\ a \times b,\ abc$?
   Mennyi az a, b vektorok kozoti szog koszinusza?
   Mennyi az a, b vektorok altal kifeszitett paraleogramma terulete?
   Mennyi az a, b vektorok altal kifeszitett haromszog terulete?
   Mennyi az a, b, c vektorok altal kifeszitett ferde teglatest (paralepipedon) terfogata?
   Mennyi az a, b, c vektorok altal kifeszitett tetraeder terfogata?

   Megoldas:
   $$5, \quad (2, 5, -4), \quad -9, \quad \sqrt{\frac{5}{14}}, \quad 3\sqrt{5}, \quad \frac{3\sqrt{5}}{2}, \quad 9, \quad \frac{3}{2}$$

2. Legyen $i + j + 3k, 3i + 3j + k, 2i + j + 4k$. Ismeteld meg az elozo feladatot!
   Megoldas:
   $$9, \quad (-8, 8, 0), \quad -8, \quad \frac{9}{\sqrt{209}}, \quad 8\sqrt{2}, \quad 4\sqrt{2}, \qquad 8, \quad \frac{4}{3}$$

3. Legyen $a = -i + 3k,\ b = 2i + 3j + k,\ c = 30i + j + 5k$. Ismeteld meg az elozo feladatot!
   Megoldas:
   $$2, \quad (-9, 4, -3), \quad -38, \quad \sqrt{\frac{2}{55}}, \quad \sqrt{106}, \quad \sqrt{\frac{53}{2}}, \quad 38, \quad \frac{19}{3}$$

4. Legyen az egysegnyi hosszusagu vektor $n = (1/2, \sqrt{3}/2)$, illetve $b = (4, 2)$. Mi b meroleges vetulete n-re? (Ezt $b_\perp$-vel jeloljuk.)
   Megoldas:
   $$b_\perp = (nb)n = \left(1/2 \cdot 4 + \sqrt{3}/2 \cdot 2\right) \cdot (1/2, \sqrt{3}/2) = (2 + \sqrt{3}) \cdot (1/2, \sqrt{3}/2) = \left(\frac{1}{2}\left(2 + \sqrt{3}\right), \frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)$$

5. Legyen az egysegnyi hosszusagu vektor $n = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, illetve $b = (5, 3)$. Ismeteld meg az elozo feladatot!
   Megoldas:
   $$b_\perp = (4, 4)$$

6. Legyen $a = (1, 3, 2)$, illetve $b = (4, 2, 5)$. Mi b meroleges vetulete a-re?
   Megoldas:
   $$b_\perp = \left(\frac{ab}{|a|^2}\right) \cdot a = \frac{1 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 5}{1^2 + 3^2 + 2^2} \cdot (4, 2, 5) = \left(\frac{23}{14}, \frac{23}{7}, \frac{69}{14}\right)$$

7. Legyen $a = (-1, 0, 2)$, illetve $b = (1, 2, 1)$. Ismeteld meg az elozo feladatot!
   Megoldas:
   $$b_\perp = \left(-\frac{1}{5}, 0, \frac{2}{5}\right)$$

8. Adott egy sik egy pontja $P = (2, 1, 3)$ es egy normalvektora $n = (3, 4, 2)$. Ird fel a sik egyenletet!
   Megoldas:
   $$n \perp (r - P) \Leftrightarrow n \cdot (r - P) = 0,$$
   $$(3, 4, 2) \cdot \big((x, y, z) - (2, 1, 3)\big) = 0,$$
   $$3(x - 2) + 4(y - 1) + 2(z - 3) = 0, \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 4y + 2z = 16$$

9. Adott egy sik egy pontja $P = (1, 1, 2)$ es egy normalvektora $n = (-2, 1, 1)$. Ismeteld meg az elozo feladatot!
   Megoldas:
   $$-2x + y + z = 1$$

10. Adott harom pont: $A = (1, 0, 2)$, $B = (2, 1, 3)\, C = (0, 1, 2)$. Ird fel az oket tartalmazo siknak egy egyenletet!
Megoldas:

$$u = B - A = (1, 1, 1),\ v = C - A = (-1, 1, 0), \quad n = u \times v = (-1, -1, 2),$$
$$n \cdot (r - A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n \cdot r = n \cdot A \quad \Leftrightarrow \quad -x - y + 2z = (-1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2) = 3$$

11. Adott harom pont: $A = (0, 1, 3)$, $B = (4, 1, 2)\, C = (2, -1, 1)$. Ismeteld meg az elozo feladatot!
Megoldas:

$$-2x + 6y - 8x = -18$$

12. Adott egy egyenes egy pontja $P = (1, 3, 2)$ es az iranyvektora $v = (-1, 5, 4)$. Ird fel az egyenes parameteres egyenletet!
Megoldas:
$$r(t) = P + tv = (1, 3, 2) + t \cdot (-1, 5, 4) = (1 - t, 3 + 5t, 2 + 4t)$$

13. Adott egy egyenes egy pontja $P = (0, -3, 4)$ es az iranyvektora $v = (1, 3, 2)$. Ismeteld meg az elozo feladatot!
Megoldas:
$$r(t) = (t, -3 + 3t, 4 + 2t)$$

14. $A = (2, 3, 1)$, $B = (1, 5, 2)$. Ird fel az A-n es B-n keresztulhalado egyenes parameteres egyenletet! Megoldas:

$$P = A = (2, 3, 1), \;\; v = B - A = (-1, 2, 1), \qquad r(t) = (2 - t, 3 + 2t, 1 + t)$$

15. $A = (0, 3, -1)$, $B = (-1, 1, -2)$. Ismeteld meg az elozo feladatot!
Megoldas:
$$r(t) = (-t, 3 - 2t, -1 - t)$$

16. Keresd meg az $3x - 2y + 4z = 12$ sik es az $r(t) = (3 + 2t, 1 - t, -2 + t)$ egyenes metszespontjat!
Megoldas:

$$3(3 + 2t) - 2(1 - t) + 4(-2 + t) = 12 \quad \Rightarrow \quad t = 13/12,$$
$$\text{metszespont: } r(13/12) = (31/6, -1/12, -11/12)$$

17. Keresd meg az $x - y + 4z = 6$ sik es az $r(t) = (3 - 2t, 1 + t, -2 - t)$ egyenes metszespontjat!
Megoldas:

$$\text{metszespont: } (45/7, -5/7, -2/7)$$

18. Keresd meg a $2x - y + 3z = 5$ sik es az origo d tavolsagat!
Megoldas:
Sik egyenlete: $n \cdot r = n \cdot P$, ahol n a sik nomalvektora, P a sik egy pontja. Esetunkben $n \cdot P = 5$, $n = (2, -1, 3)$.
Tavolsag: amilyen hosszu P meroleges vetulete n-re.

$$d = \left| \frac{n \cdot P}{|n|} \right| = \left| \frac{5}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} \right| = \frac{5}{\sqrt{14}}$$

19. Keresd meg a $-x - y + 4z = -5$ sik es az origo d tavolsagat!
Megoldas:

$$d = \frac{5}{3\sqrt{2}}$$

20. Keresd meg a $2x - y + 3z = 5$ sik es a $D = (4, 1, 3)$ pont d tavolsagat!
Megoldas:
Sik egyenlete: $n \cdot r = n \cdot P$, ahol n a sik nomalvektora, P a sik egy pontja. Esetunkben $n \cdot P = 5$, $n = (2, -1, 3)$.
Tavolsag: amilyen hosszu P-nek es D-nek az n-re vett meroleges vetuleteinek a kulonbsege.

$$d = \left| \frac{n \cdot P - n \cdot D}{|n|} \right| = \left| \frac{n \cdot (P - D)}{|n|} \right| = \left| \frac{5 - (2, -1, 3) \cdot (4, 1, 3)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} \right| = \left| \frac{5 - 16}{\sqrt{14}} \right| = \frac{11}{\sqrt{14}}$$

21. Keresd meg a $x + y + z = 6$ sik es a $D = (4, 1, 3)$ pont d tavolsagat!
Megoldas:

$$d = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

22. Keresd meg a $D = (1, 2, 3)$ pont es az $A = (0, 4, 1)$, $B = (1, 4, 2)$ pontokon athalado egyenes tavolsagat!
Megoldas:
Az egyenes iranyvektora $v = B - A = (1, 0, 1)$, parameteres egyenlete $r(t) = (0 + t, 4 + 0t, 1 + t)$. Legyen P a D-hez legkozelebbi pont az egyenesen. Ekkor $\overline{AB} \perp \overline{DP}$, vagyis a skalarszorzat $\overline{AB} \cdot \overline{DP} = 0$-val.

$$0 = \overline{AB} \cdot \overline{DP} = (1, 0, 1) \cdot (t - 1, 4 - 2, 1 + t - 3) = -3 + 2t \quad \Rightarrow \quad t = 1.5, \quad P = r(1.5) = (1.5, 4, 2.5),$$
$$\text{tavolsag:} \quad \left|\overline{DP}\right| = \sqrt{(1.5 - 1)^2 + (4 - 2)^2 + (2.5 - 3)^2} = 3/\sqrt{2}$$

23. a) Oldd meg a kovetkezo linearis egyenletrendszert:

$$\begin{array}{r} 5x_1 + 3x_2 + 0x_3 = 11 \\ 0x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 8 \\ -1x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 2 \end{array}, \qquad \text{vagyis} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Legyen $a_1 = 5i - k$, $a_2 = 3i + j$, $a_3 = 2j + k$, $b = 11i + 8j + 2k$. Fejezd ki b-t az a-k linearis kombinaciojakent!
c) Allitsd elo a $(11, 8, 2)$ vektort az $a_1 = (5, 0, -1)$, $a_2 = (3, 1, 0)$, $a_3 = (0, 2, 1)$ vektorok linearis kombinaciojakent!
Megoldas: (a p index a pivotelem poziciojat jeloli)

$$\left(\begin{array}{ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ e_1 & 5 & 3 & 0 & 11 \\ e_2 & 0 & 1_p & 2 & 8 \\ e_3 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ e_1 & 5 & 0 & -6 & -13 \\ a_2 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ e_3 & -1 & 0 & 1_p & 2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ e_1 & -1_p & 0 & 0 & -1 \\ a_2 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ a_3 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Vagyis $b = 1a_1 + 2a_2 + 3a_3$, illetve $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

Egy masik megoldas:

$$\left(\begin{array}{ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ e_1 & 5 & 3 & 0 & 11 \\ e_2 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ e_3 & -1_p & 0 & 1 & 2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ e_1 & 0 & 3 & 5 & 21 \\ e_2 & 0 & 1_p & 2 & 8 \\ a_1 & 1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ e_1 & 0 & 0 & -1_p & -3 \\ a_2 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ a_1 & 1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ a_3 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Mivel itt az utolso tablaban az a-k indexei nem a kanonikus sorrendben vannak, vigyazni kell a megoldas leolvasasaval!

24. a) Oldd meg a kovetkezo (tulhatarozott) linearis egyenletrendszert:

$$\begin{array}{r} 5x_1 + 3x_2 = 11 \\ 1x_1 + 1x_2 = 3 \\ -1x_1 + 2x_2 = 3 \end{array}, \qquad \text{vagyis} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Legyen $a_1 = 5i + j - k$, $a_2 = 3i + j + 2k$, $b = 11i + 3j + 3k$. Fejezd ki b-t az a-k linearis kombinaciojakent!
Megoldas:

$$\left(\begin{array}{cccc} & a_1 & a_2 & b \\ e_1 & 5 & 3 & 11 \\ e_2 & 1_p & 1 & 3 \\ e_3 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cccc} & a_1 & a_2 & b \\ e_1 & 0 & -2_p & -4 \\ a_1 & 1 & 1 & 3 \\ e_3 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cccc} & a_1 & a_2 & b \\ a_2 & 0 & 1 & 2 \\ a_1 & 1 & 0 & 1 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tehat $b = 1a_1 + 2a_2$ vagyis $x_1 = 1, x_2 = 2$.

25. a) Oldd meg a kovetkezo (tulhatarozott) linearis egyenletrendszert:

$$\begin{array}{r} 5x_1 + 3x_2 = 11 \\ 1x_1 + 1x_2 = 3 \\ -1x_1 + 2x_2 = 4 \end{array}, \qquad \text{vagyis} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) Legyen $a_1 = 5i + j - k$, $a_2 = 3i + j + 2k$, $b = 11i + 3j + 4k$. Fejezd ki b-t az a-k linearis kombinaciojakent!
Megoldas:

$$\left(\begin{array}{cccc} & a_1 & a_2 & b \\ e_1 & 5 & 3 & 11 \\ e_2 & 1_p & 1 & 3 \\ e_3 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cccc} & a_1 & a_2 & b \\ e_1 & 0 & -2_p & -4 \\ a_1 & 1 & 1 & 3 \\ e_3 & 0 & 3 & 7 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cccc} & a_1 & a_2 & b \\ a_2 & 0 & 1 & 2 \\ a_1 & 1 & 0 & 1 \\ e_3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tehat nincs megoldas, mivel b nem fejezheto ki csak $a_{1,2}$-t hasznalva. az utolso tabla utolso oszlopa alapjan.

26. Oldd meg az

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\end{pmatrix}$$

alulhatarozott egyenlet(rendszert)!
Megoldas:
Egy partikularis megoldas, illetve a homogen $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ egyenlet ket megoldasa:

$$\text{part:} \quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \text{hom:} \quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Az altalanos megoldas: part.megold+(lin.komb. hom.megold.)

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} + t_3\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} - x_2\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} - x_3\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$$

27. Oldd meg az

$$\begin{matrix} x_1 + 2x_2 + 15x_3 = 35 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 = 25 \end{matrix}, \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 15\\2 & -1 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}35\\25\end{pmatrix}$$

alulhatarozott egyenletrendszert!
Megoldas:

$$\left(\begin{array}{ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b\\ e_1 & 1_p & 2 & 15 & 35\\ e_2 & 2 & -1 & 10 & 25\end{array}\right), \left(\begin{array}{ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b\\ a_1 & 1 & 2 & 15 & 35\\ e_2 & 0 & -5_p & -20 & -45\end{array}\right), \left(\begin{array}{ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b\\ a_1 & 1 & 0 & 7 & 17\\ a_2 & 0 & 1 & 4 & 9\end{array}\right)$$

Tehat az altalanos megoldas:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17\\9\\0\end{pmatrix} + t_3\begin{pmatrix}7\\4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17\\9\\0\end{pmatrix} - x_3\begin{pmatrix}7\\4\\-1\end{pmatrix}$$

Ellenorzes:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 15\\2 & -1 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}17\\9\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}35\\25\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 15\\2 & -1 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

28. Invertald a kovetkezo matrixot:

$$A = \begin{pmatrix}5 & 3 & 0\\0 & 1 & 2\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Megoldas:

$$\left(\begin{array}{ccccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & e_1 & e_2 & e_3\\ e_1 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0\\ e_2 & 0 & 1_p & 2 & 0 & 1 & 0\\ e_3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right), \left(\begin{array}{ccccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & e_1 & e_2 & e_3\\ e_1 & 5 & 0 & -6 & 1 & -3 & 0\\ a_2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ e_3 & -1 & 0 & 1_p & 0 & 0 & 1\end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & e_1 & e_2 & e_3\\ e_1 & -1_p & 0 & 0 & 1 & -3 & 6\\ a_2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2\\ a_3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right), \left(\begin{array}{ccccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & e_1 & e_2 & e_3\\ a_1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -6\\ a_2 & 0 & 1 & 0 & 2 & -5 & 10\\ a_3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -5\end{array}\right),$$

tehat

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & 3 & -6\\2 & -5 & 10\\-1 & 3 & -5\end{pmatrix}$$

mivel ellenorzeskeppen

$$\begin{pmatrix}5 & 3 & 0\\0 & 1 & 2\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3 & -6\\2 & -5 & 10\\-1 & 3 & -5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

29. Invertald a kovetkezo matrixot:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Megoldas:

$$\begin{pmatrix} & a_1 & a_2 & e_1 & e_2 \\ e_1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ e_2 & 2_p & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & a_1 & a_2 & e_1 & e_2 \\ e_1 & 0 & 3_p & 1 & 0 \\ a_1 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & a_1 & a_2 & e_1 & e_2 \\ a_2 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

vagyis

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Mivel $a_{1,2}$ nem a kanonikus rendben all a fuggoleges cimkekben, az utolso tablaban fel kellett cserelni az elso es a masodik sort.
Ellenorzes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

30. Szamitsd ki a kovetkezo matrix determinansat pivotalassal!

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldas:

$$\begin{pmatrix} & a_1 & a_2 & a_3 \\ e_1 & 5 & 3 & 0 \\ e_2 & 0 & 1_p & 2 \\ e_3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & a_1 & a_2 & a_3 \\ e_1 & 5 & 0 & -6 \\ a_2 & 0 & 1 & 2 \\ e_3 & -1 & 0 & 1_p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & a_1 & a_2 & a_3 \\ e_1 & -1_p & 0 & 0 \\ a_2 & 2 & 1 & 0 \\ a_3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tehat $det(A) = 1_p \cdot 1_p \cdot (-1_p) = -1$, vagyis a pivotelemek szorzata -1, ez a keresett determinans, mivel az utolso tabla a 3×3 egysegmatrix.

31. Szamitsd ki a kovetkezo matrix determinansat pivotalassal!

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldas:

$$\begin{pmatrix} & a_1 & a_2 & a_3 \\ e_1 & 0 & 1_p & 2 \\ e_2 & 5 & 3 & 0 \\ e_3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & 0 & 1 & 2 \\ e_2 & 5 & 0 & -6 \\ e_3 & -1_p & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & 0 & 1 & 2 \\ e_2 & 0 & 0 & -1_p \\ a_1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tehat $det(A) = 1_p \cdot (-1_p) \cdot (-1_p) \cdot 1 = 1$, ahol a az utolso tenyezo 1, mivel az $(1,2,3) \to (3,1,2)$ permutacio paros. (Paratlan permutaciok eseteben ez a faktor -1 lenne.)

32. Legyen $u = -1 + \sqrt{3}i$, $v = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Mennyi uv, u/v, u^{13}, $\bar{u}v$, $\sqrt[3]{iu}$?
Megoldas:

$$u = -1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right), \quad v = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}(1+i),$$

$$uv = \left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right] \cdot \left[3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right] = (2\cdot 3)\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 6\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right),$$

$$u/v = \left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right] \Big/ \left[3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right] = (2/3)\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right),$$

$$u^{13} = \left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{13} = 2^{13}\left(\cos\left(13\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(13\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 8192\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right), \qquad \text{mivel} \quad 13\cdot(2\pi/3) = 4\cdot 2\pi + 2\pi/3.$$

$$\bar{u}v = \left[2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)\right]\cdot\left[3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right] = (2\cdot 3)\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 6\left(\cos\frac{-5\pi}{12} + i\sin\frac{-5\pi}{12}\right) = 6\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right),$$

$$iu = (\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)\cdot\left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right),$$

$$\sqrt[3]{iu} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi/6}{3} + \frac{2\pi\cdot k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi/6}{3} + \frac{2\pi\cdot k}{3}\right)\right), \quad \text{ahol} \;\; k = 0, 1, 2.$$

33. Keresd meg a hibas megoldasokat!

Minta ZH.

ido: 50 perc, alairas: legalabb 50%

0.1

1. Legyen $a = 2i + 2j + -5k,\ b = 2j + 3k,\ c = i + 2j + k.$
   Mennyi $ab,\ a\times b,\ abc$?
   Mennyi az a, b vektorok kozoti szog koszinusza?
   Mennyi az a, b vektorok altal kifeszitett paraleogramma terulete?
   Mennyi az a, b vektorok altal kifeszitett haromszog terulete?
   Mennyi az a, b, c vektorok altal kifeszitett ferde teglatest (paralepipedon) terfogata?
   Mennyi az a, b, c vektorok altal kifeszitett tetraeder terfogata?

2. Adott harom pont: $A = (1, 1, 3)$, $B = (-4, 1, 3)$, $C = (1, 1, 2)$. Ird fel az oket tartalmazo siknak egy, a sikot meghatarozo egyenletet!
   Mennyi a $D = (1, 0, 5)$ pont tavolsaga ettol a siktol?
   Keresd meg az $E = (1, 2, 3)$ es a $F = (3, 2, 1)$ pontokon athalado egyenes es a sik metszespontjat!

3. Oldd meg a kovetkezo linearis egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 0x_1 + 1x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 4x_1 + 1x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 9 \end{aligned}$$

   Ellenorizd az eredmenyt!

4. Invertald a kovetkezo matrixot:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Ellenorizd az eredmenyt!
   Mennyi $det(A)$? (Hasznalhatsz pivotalast vagy kifejtest is!)

0.2

1. Legyen $a = 2i + 2j + -5k,\ b = 2j + 3k,\ c = i + 2j + k.$
   Ird fel az $a = A$ es a $b = B$ pontokon athalado egyenes parameteres egyenletet!
   Mennyi a meroleges vetulete b-re?
   Mennyi a hossza a meroleges vetuletenek b-re?
   Legyen $d = i + j - xk$. Mennyi x, ha $c\perp d$?

2. Egy egyenes menjen at az $A = (1, 4, 2)$ es a $B = (2, 4, 1)$ pontokon. Mennyi ennek az egyenesnek a tavolsaga a $(3, 3, 3)$ ponttol?

3. Keresd meg az osszes lehetseges eloallitasat a $(11, 8, 2)$ vektornak az $a_1 = (5, 1, 1)$, $a_2 = (3, 1, 0)$, $a_3 = (8, 2, 1)$ vektorok linearis kombinaciojakent!

4. Legyen $u = -\sqrt{3}i - 1,\ v = -1 - i$. Mennyi $u + v,\ uv,\ u/v,\ u\bar{v},\ (iu)^5,\ \sqrt[5]{v}$?

Megjegyzes: a vektorok eseteben tipikusan a-t irtam $\bar{a}$ helyett, a pivottablak formatuma is inkabb a gyakorlatokon hasznaltat kellene hogy kovesse. A Zh. a ket minta zh-nak a kombinacioja lesz, persze mas parameterekkel.