Lin.Alg.Zh.1-2 feladatok

1. Lin.Alg.Zh.1 feladatok

1.1. 3d vektorok

Adott három vektor
$$\bar{a} = (0, 2, 4), \quad \bar{b} = (1, 1, 4), \quad \bar{c} = (0, 2, -4)$$
az $\mathbb{R}^3$ Euklideszi vektortérben egy ortonormált bázisban.

1. Mennyi az $\bar{a}\bar{b}$ skalárszorzat?
   M:
   $$\bar{a}\bar{b} = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 = 18$$
   □

2. Mennyi az $\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b}$ vektoriális szorzat?
   M:
   $$\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = i \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - j \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (4, 4, -2)$$
   □

3. Mennyi az $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ vegyesszorzat?
   M:
   $$v = (\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = (4, 4, -2)(0, 2, -4) = 16$$
   vagy
   $$v = (\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 16$$
   □

4. Merőleges-e egymásra $\bar{a}$ és $\bar{b}$? Miért?
   M:
   Nem, mert az $s = 18$ skalárszorzat nem nulla.
   □

5. Egy síkba esik-e $\bar{a}$, $\bar{b}$ és $\bar{c}$? Miért?
   M:
   Nem, mert az $v = 16$ vegyesszorzat nem nulla.
   □

6. Mennyi az $\bar{a}$, $\bar{b}$ vektorok által bezárt szög koszinusza?
   M:
   $$\cos\alpha = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = 3/\sqrt{10}$$
   □

7. Mennyi az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe?
   M:
   $$T_{par} = |\bar{a} \times \bar{b}| = |(4, 4, -2)| = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-2)^2} = 6$$
   □

8. Mennyi az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektorok által kifeszített háromszög területe?
   M:
   $$T_{harom} = \frac{T_{par}}{2} = 3$$
   □

9. Mennyi az $\bar{a}$, $\bar{b}$ és $\bar{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata?
M:
$$V_{pip} = |\bar{a}\bar{b}\bar{c}| = |v| = 16$$
□

10. Mennyi az $\bar{a}$, $\bar{b}$ és $\bar{c}$ vektorok által kifeszített tetraéder térfogata?
M:
$$V_{tetra} = \frac{V_{pip}}{6}$$
□

11. Milyen sodrású az $\bar{a}$, $\bar{b}$ és $\bar{c}$ vektorok által alkotott rendszer? Miért?
M:
Jobb, mivel
$$v = \bar{a}\bar{b}\bar{c} > 0$$
(Ha $v < 0$ balsodrású, míg $v = 0$ eseten a három vektor egy síkba esik.)
□

12. Bázist alkot-e $\bar{a}$, $\bar{b}$ és $\bar{c}$? Miért?
M:
Igen, mert
$$v = \bar{a}\bar{b}\bar{c} \neq 0$$
□

13. Mennyi $\bar{c}$-nek a $\bar{c}_p$ merőleges vetülete $\bar{c}$-re?
M:
$\bar{c}$
□

14. Mennyi $\bar{c}$-nek a $\bar{c}_p$ merőleges vetülete $\bar{a}$-re?
M:
$$\bar{c}_p = \frac{\bar{a}\bar{c}}{|\bar{a}|^2} \cdot a = \frac{-12}{20} \cdot (0, 2, 4) = (0, -6/5, -12/5)$$
□

15. Mennyi $\bar{c}$-nek a $\bar{c}_t$ merőleges tükrözöttje $\bar{c}$-re?
M:
$\bar{c}$
□

16. Mennyi $\bar{c}$-nek a $\bar{c}_t$ merőleges tükrözöttje $\bar{a}$-re?
M:
$$\bar{c}_t = 2\bar{c}_p - \bar{c} = (0, -22/5, -4/5)$$
□

17. Mennyi $\bar{c}$-nek a $\bar{c}_p$ merőleges vetülete a $\bar{c}$ és a $\bar{a}$ vektorok által generált síkra?
M:
$\bar{c}$
□

18. Mennyi $\bar{c}$-nek a $\bar{c}_p$ merőleges vetülete a $\bar{a}$ és a $\bar{b}$ vektorok által generált síkra?
M:
$$\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b} = (0, 2, -4),$$
$$\bar{c}_m = \frac{\bar{n}\bar{c}}{|\bar{n}|^2} \cdot n = (16/9, 16/9, -8/9),$$
$$\bar{c}_p = \bar{c} - \bar{c}_m = (-16/9, 2/9, -28/9)$$
□

19. Mennyi $\bar{c}$-nek a $\bar{c}_t$ merőleges tükrözöttje a $\bar{c}$ és a $\bar{a}$ vektorok által generált síkra?
M:
$\bar{c}$
□

20. Mennyi $\bar{c}$-nek a $\bar{c}_t$ merőleges tükrözöttje a $\bar{a}$ és a $\bar{b}$ vektorok által generált síkra?
M:
$$\bar{c}_t = \bar{c} - 2\bar{c}_m = (-32/9, -14/9, -20/9)$$
□

Gyakorlás

Ismételd meg a feladatot!

I.

$$\bar{a} = (3, 1, 1), \quad \bar{b} = (0, 4, 1), \quad \bar{c} = (1, 1, -5)$$

Megoldás:

5	$\{-3, -3, 12\}$	-66	nem	nem
$\frac{5}{\sqrt{187}}$	$9\sqrt{2}$	$\frac{9}{\sqrt{2}}$	66	11
bal	igen	$\{1, 1, -5\}$	$\{-\frac{3}{11}, -\frac{1}{11}, -\frac{1}{11}\}$	$\{1, 1, -5\}$
$\{-\frac{17}{11}, -\frac{13}{11}, \frac{53}{11}\}$	$\{1, 1, -5\}$	$\{-\frac{2}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{1}{9}\}$	$\{1, 1, -5\}$	$\{-\frac{13}{9}, -\frac{13}{9}, \frac{43}{9}\}$

II.

$$\bar{a} = (3, 1, 1), \quad \bar{b} = (0, 4, 1), \quad \bar{c} = (3, 9, 3)$$

Megoldás:

5	$\{-3, -3, 12\}$	0	nem	igen
$\frac{5}{\sqrt{187}}$	$9\sqrt{2}$	$\frac{9}{\sqrt{2}}$	0	0
nem bazis	nem	$\{3, 9, 3\}$	$\{\frac{63}{11}, \frac{21}{11}, \frac{21}{11}\}$	$\{3, 9, 3\}$
$\{\frac{93}{11}, -\frac{57}{11}, \frac{9}{11}\}$	$\{3, 9, 3\}$	$\{3, 9, 3\}$	$\{3, 9, 3\}$	$\{3, 9, 3\}$

(Az első sorban az 1-5 kérdések válaszai vannak, stb.. Továbbá {} zárójelekben vannak a vektorok.)

1.2. Pontok, egyenesek, síkok

Adott három pont

$$P = (0, 2, 4), \quad Q = (1, 1, 4), \quad S = (3, 2, 6)$$

az $\mathbb{R}^3$ Euklideszi vektortérben egy ortonormált bázisban.

1. Írd fel a P és Q pontokat tartalmazó egyenes

   (a) parametrikus,
   M:

   $$\bar{v} = Q - P = (1, -1, 0),$$
   $$\bar{r}(t) = P + t \cdot \bar{v} = (t, 2 - t, 4).$$

   □

   (b) illetve algebrai egyenleteit!
   M:

   $$x = t, \quad 2 - t = y, \quad z = 4,$$
   $$t = x, \quad t = 2 - y, \qquad \text{igy az egyenest meghatazozo ket egyenlet:}$$
   $$x = 2 - y, \qquad z = 4.$$

   □

   (c) Hol van az $O = (0, 0, 0)$-hoz legközelebbi $K = \bar{r}(t_0)$ pont az egyenesen?
   M:

   $$0 = \bar{r}(t_0)\bar{v} = (t_0, 2 - t_0, 4)(1, -1, 0) = -2 + 2t_0 \quad \Longrightarrow \quad t_0 = 1,$$
   $$K = \bar{r}(1) = (1, 1, 4).$$

   □

   (d) Mennyi az egyenes távolsága az O origótól?
   M:

   $$|(1, 1, 4)| = 3\sqrt{2}.$$

   □

(e) Hol van az S-hez legközelebbi pont az egyenesen?
M:

$$0 = (S - \bar{r}(t_0))\bar{v} = (3 - t_0, t_0, 2)(1, -1, 0) = 3 - 2t_0 \implies t_0 = 3/2,$$
$$K = \bar{r}(3/2) = (3/2, 1/2, 4).$$

□

(f) Mennyi az egyenes távolsága S-tol?
M:

$$|\overline{SK}| = |(3/2, 1/2, 4) - (3, 2, 6)| = \sqrt{17/2}.$$

□

Gyakorlás

Ismételd meg a feladatot!

I.

$$P = (1, 2, 2), \quad Q = (5, 3, 1), \quad S = (3, 0, 6)$$

Megoldás:

$$\bar{r}(t) = \{4t + 1, t + 2, 2 - t\}, \qquad \frac{x-1}{4} = y - 2 = 2 - z, \qquad \left\{\frac{1}{9}, \frac{16}{9}, \frac{20}{9}\right\},$$
$$\frac{\sqrt{73}}{3}, \quad \left\{\frac{13}{9}, \frac{19}{9}, \frac{17}{9}\right\}, \quad \frac{\sqrt{214}}{3}$$

2.

$$P = (0, 2, 4), \quad Q = (1, 1, 4), \quad R = (1, 0, 1), \quad S = (3, 2, 6)$$

Keresd meg a P, Q, R pontokat tartalmazó síkot! Írd fel a sík

(a) parametrikus,
M:

$$\bar{a} = Q - P = (0, -1, 2), \quad \bar{b} = R - P = (0, 2, -1),$$
$$\bar{r}(u, v) = (1, 2 - u - 2v, 2 + 2u - v).$$

□

(b) illetve algebrai egyenleteit!
M:

$$\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b} = (5, -3, 1),$$
$$0 = \bar{n}\,[\bar{r} - P] = (5, -3, 1)(x - 0, y - (-1), z - 4),$$
$$5x - 3y + z - 6 = 0.$$

□

(c) Mennyi az sík távolsága az origótól?
M:
P-nek a $\bar{p}_m$ merőleges vetülete $\bar{n}$-re

$$\bar{p}_m = \frac{\bar{n}P}{|\bar{n}|^2} \cdot \bar{n} = \left(\frac{6}{7}, -\frac{18}{35}, \frac{6}{35}\right), \qquad \text{tavolsag} = |\bar{p}_m| = \frac{\bar{n}P}{|\bar{n}|} = \frac{6}{\sqrt{35}}.$$

Persze $\bar{p}_m = \bar{q}_m = \bar{r}_m$.
□

(d) Hol van O merőleges vetülete a síkon?
M:
Ahol $\bar{p}_m = \left(\frac{6}{7}, -\frac{18}{35}, \frac{6}{35}\right)$.
□

(e) Hol van O-nak a síkra történő merőleges tükrözöttje?
M:
Ahol $2\bar{p}_m = \left(\frac{12}{7}, -\frac{36}{35}, \frac{12}{35}\right)$.
□

(f) Hol van S-nek a $\bar{s}_{sik}$ merőleges vetülete a síkon?
M:
S-nek a $\bar{s}_{sik}$ merőleges vetülete $\bar{n}$-re

$$\bar{s}_m = \frac{\bar{n}S}{|\bar{n}|^2} \cdot \bar{n} = \left(\frac{15}{7}, -\frac{9}{7}, \frac{3}{7} \right),$$

$$\bar{s}_{sik} = S - (\bar{s}_m - \bar{p}_m) = \left(\frac{12}{7}, \frac{97}{35}, \frac{201}{35} \right)$$

□

(g) Mennyi az sík távolsága S-tol?
M:

$$|\bar{s}_m - \bar{p}_m| = \frac{\bar{n}(S-P)}{|\bar{n}|} = \frac{9}{\sqrt{35}}$$

□

(h) Hol van S-nak a síkra történő merőleges tükrözöttje?
M:

$$\bar{s}_{sik} = S - 2(\bar{s}_m - \bar{p}_m) = \left(\frac{3}{7}, \frac{124}{35}, \frac{192}{35} \right)$$

□

Gyakorlás

Ismételd meg a feladatot!

I.

$$P = (1,2,2), \quad Q = (1,3,1), \quad R = (0,2,-4), \quad S = (3,0,-1)$$

Megoldás:

$$\bar{r}(u,v) = (1-v, 2+u, 2-u-6v), \quad 2-6x+y+z=0, \quad \sqrt{2/19}, \quad (6/19, -(1/19), -(1/19)),$$
$$(12/19, -(2/19), -(2/19)), \quad (6/19, 17/38, -(21/38)), \quad 17/\sqrt{38}, \quad (-(45/19), 17/19, -(2/19))$$

3. Mennyi a $PQRST$ tetraéder térfogata?
M:

$$\bar{a} = Q - P = (-1,-1,2), \quad \bar{b} = R - P = (-1,-2,-1), \quad \bar{c} = (1,0,4),$$
$$\text{Terfogat} = \frac{|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|}{6} = \frac{3}{2}$$

□

4. Hol van a PQR sík, továbbá az S és az $(1,2,3)$ pontokon áthaladó egyenes metszéspontja?
M:
Egyenes paraméteres egyenlete
$$\bar{r}(t) = (3+2t, 2, 6+3t).$$
Sík algebrai egyenlete
$$-6 + 5x - 3y + z = 0.$$
Ha metszéspontnál t értéké t_0, akkor
$$-6 + 5 \cdot (3 + 2t_0) - 3 \cdot (2) + (6 + 3t_0) = 0, \quad \Longrightarrow \quad t_0 = -9/13.$$
A metszéspont
$$\bar{r}(-9/13) = \left(\frac{21}{13}, 2, \frac{51}{13} \right).$$

□

1.3. Lineáris transzformációk

1. Legyen $\phi\left((x,y)^T\right) = (2x+3y,\, 4x+5y)^T$ és $\psi\left((x,y,z)^T\right) = (z, y-x)^T$.

   (a) Mennyi a ϕ transzformáció F mátrixa?
   M:
   $$\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 4x+5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
   □

   (b) Mennyi a ψ transzformáció P mátrixa?
   M:
   $$\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z \\ y-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
   □

   (c) Mennyi a $\mu(\bar{v}) = \phi(\psi(\bar{v})) = (\phi \circ \psi)(\bar{v})$ transzformáció M mátrixa?
   Mi köze van az eredménynek F és P-hez?
   M:
   $$M = FP = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$
   □

   (d) Mennyi a $\nu(\bar{v}) = \psi(\phi(\bar{v})) = (\psi \circ \phi)(\bar{v})$ transzformáció N mátrixa?
   Mi köze van az eredménynek F és P-hez?
   M:
   $$N = PF = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$
   lenne, de nem lehet elvégezni a mátrixszorzást. A $\nu = \psi \circ \phi$ kompozíció sincs értelmezve.
   □

2. Legyen $\phi((x,y)) = (2x+3y,\, 4x+5y)$ és $\psi((x,y,z)) = (z, y-x)$.

   (a) Mennyi a ϕ transzformáció F mátrixa?
   M:
   $$\phi\left(\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x+3y & 4x+5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} F$$
   □

   (b) Mennyi a ψ transzformáció P mátrixa?
   M:
   $$\phi\left(\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z & y-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} P$$
   □

   (c) Mennyi a $\mu(\bar{v}) = \phi(\psi(\bar{v})) = (\phi \circ \psi)(\bar{v})$ transzformáció M mátrixa?
   Mi köze van az eredménynek F és P-hez?
   M:
   $$M = PF = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$
   A mátrixos sorrendje az előző oszlopvektoros feladatokhoz kepést megfordult, és a felhasznált mátrixok az előzőek transzponáltjai.
   □

   (d) Mennyi a $\nu(\bar{v}) = \psi(\phi(\bar{v})) = (\psi \circ \phi)(\bar{v})$ transzformáció N mátrixa?
   Mi köze van az eredménynek F és P-hez?
   M:
   $$N = FP = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   lenne, de nem lehet elvégezni a mátrixszorzást. A $\nu = \psi \circ \phi$ kompozíció sincs értelmezve.
   □

3. Legyenek a feladat $(x,y)^T$ vektorai az $\mathbb{R}^2$ Euklideszi vektortérben egy ortonormált bázisban megadva mint oszlopvektorok. Számítsd ki a következő transzformációk hatását az $\bar{e}_1 = (1,0)^T$ és a $\bar{e}_2 = (0,1)^T$ ortonormált bázisvektorokra, illetve írd fel a lin.tr. mátrixát!

A megoldás elve: $A\bar{e}_1$ az A mátrix első oszlopa, míg $A\bar{e}_2$ az A mátrix második oszlopa. Így $A\bar{e}_1$, $A\bar{e}_2$-bol mint oszlopvektorokból felépíthető az A mátrix.

(a) Az x tengelyre való merőleges vetítés,
M:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

(b) az y tengelyre való merőleges vetítés,
M:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

(c) az $x = y$ egyenesre való merőleges vetítés,
M:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

□

(d) az x tengelyre való merőleges tükrözés,
M:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

□

(e) az y tengelyre való merőleges tükrözés,
M:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

(f) az $x = y$ egyenesre való merőleges tükrözés,
M:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

(g) az origóra való tükrözés,
M:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

□

(h) az x tengelyre való vetítés, ha a vetítés iránya párhuzamos az $x = y$ egyenessel,
M:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

(i) az x tengelyre való vetítés, ha a vetítés iránya párhuzamos az $x + y = 0$ egyenessel,
M:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

(j) a $\bar{n} = (\cos(30)^\circ, \sin(30)^\circ)^T$ vektorra való merőleges vetítés P_n mátrixa,
M:

$$\bar{n} = \begin{pmatrix} \sqrt{3/2} \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

$$P_n = \bar{n} \otimes \bar{n} = \bar{n}\bar{n}^T = \begin{pmatrix} \sqrt{3/2} \\ 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3/2} & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

□

(k) a $\bar{n} = (\cos(30)^\circ, \sin(30)^\circ)$ vektorra való merőleges tükrözés T_n mátrixa.
M:

$$T_n\bar{v} = 2P_n\bar{v} - \bar{v}, \quad \Longrightarrow \quad T_n = 2P_n - E,$$
$$T_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

□

(l) 45° fokos elforgatás,
M:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

□

(m) 30° fokos elforgatás.
M:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3/2} & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3/2} \end{pmatrix}$$

□

4. Legyenek a feladat $(x, y, z)^T$ vektorai az $\mathbb{R}^3$ Euklideszi vektortérben egy ortonormált bázisban megadva mint oszlopvektorok. Számítsd ki a következő transzformációk hatását az $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)^T$ $\bar{e}_2 = (0, 1, 0)^T$ és a $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)^T$ ortonormált bázisvektorokra, illetve írd fel a lin.tr. mátrixát!

(a) Az y tengelyre való merőleges vetítés,
M:

$$\begin{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix}$$

□

(b) az z tengelyre való merőleges vetítés,
M:

$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

□

(c) az xy síkra való merőleges vetítés,
M:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix}$$

□

(d) az y tengelyre való merőleges tükrözés,
M:

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

□

(e) az $x = y$ síkra való merőleges tükrözés,
M:

$$\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

□

(f) az origóra való tükrözés,
M:

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

□

(g) az xy síkra való vetítés, ha a vetítés iránya párhuzamos a $(1, 0, 1)^T$ vektorral,
M:

$$\begin{pmatrix} 1 & & -1 \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix}$$

□

(h) az x tengelyre való vetítés, ha a vetítés iránya párhuzamos az $x + z = 0$ síkkal,
M:

$$\begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

□

(i) a $\bar{n} = (\cos(30)^\circ, 0, \sin(30)^\circ)$ vektorra való merőleges vetítés,
M:

$$\bar{n} = \begin{pmatrix} \sqrt{3/2} \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

$$P_n = \bar{n} \otimes \bar{n} = \bar{n}\bar{n}^T = \begin{pmatrix} \sqrt{3/2} \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3/2} & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

□

(j) a $\bar{n} = (\cos(30)^\circ, 0, \sin(30)^\circ)$ vektorra való merőleges tükrözés,
M:

$$T_n\bar{v} = 2P_n\bar{v} - \bar{v}, \quad \Longrightarrow \quad T_n = 2P_n - E,$$

$$T_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

□

(k) merőleges vetítés az $x + y + z = 0$ síkra,
M:

$$\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1\ 1\ 1)^T,$$

$$P_{sik} = E - \bar{n}\bar{n}^T = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

□

(l) merőleges tükrözés az $x + y + z = 0$ síkra.
M:

$$\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1\ 1\ 1)^T,$$

$$T_{sik} = E - 2\bar{n}\bar{n}^T = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

□

5. Legyen $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$. Mennyi A, ha $A\bar{v}$ az a vektor, amelynek az

(a) i-edik eleme v_i szomszédainak (vagy szomszédjának, ha i 1 vagy 4) az átlaga?
M:

$$A\bar{v} = \begin{pmatrix} v_2 \\ (v_1 + v_3)/2 \\ (v_2 + v_4)/2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

□

(b) i-edik eleme v_i szomszédainak az átlaga, ahol az első és az utolsó elemeket is szomszédoknak tekintjük?
M:

$$A\bar{v} = \begin{pmatrix} (v_2+v_4) \\ (v_1+v_3)/2 \\ (v_2+v_4)/2 \\ (v_1+v_3)/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

□

(c) Ismételd meg a feladatot abban az esetben, ha a $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ és az $\bar{v}A$ vektorra érvényesek ugyanezek a feltételek!
M:
Ha sorvektorokat használunk, akkor transzponálni kell az előző mátrixokat, de mivel azok szimmetrikusak a transzponálásra nézve, így semmi sem változik.
□

6. (Hasonlósági transzformáció) Egy nyúlpopulációban a nyulak mind Szilveszterkor születtek, továbbá az egy éves nyulak 3, míg az ennél idősebbek 4 újszülöttet szülnek Szilveszterenként. A populációt jellemezhetjük a December 31-én, éppen az új nyulak születése előtt megmert

- $\bar{v} = (e, o)_v^T$
- $\bar{w} = (e, p)_w^T$

vektorokkal. (Itt e az egyévesek, o az öreg nyulak, míg p a teljes populáció létszámát jelölik. Az v, w indexek azt jelzik, hogy melyik koordináta rendszert használjuk ugyanannak a populációnak a leírására.)

(a) Ha a nyúlpopulációt leíró vektorok $A\bar{v}$ és $B\bar{w}$ lesznek egy év múlva, akkor mennyi
- A és
- B ?

M:

$$A_{v\leftarrow v}\bar{v} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{v\leftarrow v}\begin{pmatrix} e \\ o \end{pmatrix}_v, \qquad A_{v\leftarrow v} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{v\leftarrow v}$$

$$B_{w\leftarrow w}\bar{w} = \begin{pmatrix} 3e+4(p-e) \\ p+[3e+4(p-e)] \end{pmatrix}_w = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}_{w\leftarrow w}\begin{pmatrix} e \\ o \end{pmatrix}_w, \qquad B_{w\leftarrow w} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{w\leftarrow w}$$

□

(b) Ha $\bar{v} = S\bar{w}$, akkor mennyi S ?
M:

$$\begin{pmatrix} e \\ o \end{pmatrix}_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{v\leftarrow w}\begin{pmatrix} e \\ p \end{pmatrix}_w = S_{v\leftarrow w}\bar{w}$$

□

(c) Ha $\bar{w} = R\bar{v}$, akkor mennyi R ?
M:

$$\begin{pmatrix} e \\ p \end{pmatrix}_w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{w\leftarrow v}\begin{pmatrix} e \\ o \end{pmatrix}_v = R_{w\leftarrow v}\bar{v}$$

□

(d) Mi köze van S-nek R-hez?
M:

$$S^{-1} = R, \qquad R^{-1} = S, \qquad RS = SR = E.$$

Valóban:

$$SR = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

(e) Mi köze van R-nek és A-nak B-hez?
M:

$$B_{w\leftarrow w} = R_{w\leftarrow v}A_{v\leftarrow v}S_{v\leftarrow w} = R_{w\leftarrow v}A_{v\leftarrow v}(R_{w\leftarrow v})^{-1}_{v\leftarrow w}$$

Valóban:

$$B = RAS = RAR^{-1},$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

(f) Mi köze van S-nek és B-nek A-hoz?
M:

$$A_{v\leftarrow v} = S_{v\leftarrow w} B_{w\leftarrow w} R_{w\leftarrow v} = S_{v\leftarrow w} B_{w\leftarrow w} (S_{v\leftarrow w})^{-1}_{w\leftarrow v}$$

Valóban:

$$A = SBR = SBS^{-1},$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

7. Legyen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
Mennyi $AB - BA + 3E$?
M:
$$\begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$$
□

8. Legyen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
   - Mennyi $AB - 3E$?
     M:
     $$\begin{pmatrix} -10 & -12 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
     □
   - Mennyi $BA + 3E$?
     M:
     $$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$
     □

1.4. Inhomogén lin.tr. (affin tr.)

1. Legyen $\phi_{a,b}(x) = ax + b$. Ha $\phi_{a,b} \circ \phi_{c,d} = \phi_{e,f}$, akkor mennyi e és f ?
M:
$$\phi_{a,b} \circ \phi_{c,d}(x) = \phi_{a,b}(\phi_{c,d}(x)) = \phi_{a,b}(cx + d)$$
$$= a(cx + d) + b = acx + (ad + b) = \phi_{ac,ad+b}(x),$$
$$e = ac, \qquad f = ad + b.$$
□

2. Legyen $f(x) = 3x + 4,\ x_0 = 44$. Mennyi $f^n(x_0)$?
M:
f fixpontja:
$$f(x_{fix}) = x_{fix}, \qquad x_{fix} = 3x_{fix} + 4 \quad \Longrightarrow \quad x_{fix} = -2.$$
Ha a fixpont az origó, akkor ebben a koordinátarendészében f homogén lineáris lesz, így
$$f^n(x_0) = 3^n(44 - (-2)) + (-2).$$
□

3. Legyen $f(x) = x + 4,\ x_0 = 6$. Mennyi $f^n(x_0)$?
M:
Itt f-nek nincs fixpontja, viszont $f^n(x)$ egy számtani sorozat, így
$$f^n(x) = 6 + 4n.$$
□

4. Legyen $f(x) = 1.2x - 4$. Mennyi $f^n(99)$?
   M:
   f fixpontja:
   $$f(x_{fix}) = x_{fix}, \qquad x_{fix} = 1.2x_{fix} - 4 \implies x_{fix} = 20.$$
   Ha a fixpont az origó, akkor ebben a koordinátarendészében f homogén lineáris lesz, így
   $$f^n(x_0) = 1.2^n(99 - 20) + 20.$$
   □

5. Add meg az
   $$\begin{pmatrix} 1.2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   mátrixnak a $\lambda = 1$ sajátértékéhez tartozó egyik sajátvektort!
   M:
   $$\begin{pmatrix} 1.2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2x - 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$
   $$1.2 \cdot 20 - 4 = 20,$$
   $$\begin{pmatrix} 1.2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   Tehát a $\bar{v}_1 = (20, 1)^T$ vektor $\lambda = 1$ sajátértékű sajtvektora a feladat mátrixának. ($\bar{v}_1$ többszörösei szintén ilyen vektorok lennének.)
   □

1.5. Linearitás, bilinearitas, multilinearitás

1. Legyen ϕ egy lineáris transzformáció, továbbá legyen
   $$\phi(\bar{v}_1) = (1, 2, 3)^T, \quad \phi(\bar{v}_2) = (3, 2, 1)^T.$$
   Mennyi $\phi(4\bar{v}_1 - 5\bar{v}_2)$?
   M:
   A linearitás miatt
   $$\phi(4\bar{v}_1 - 5\bar{v}_2) = 4\phi(\bar{v}_1) - 5\phi(\bar{v}_2) = 4 \cdot (1, 2, 3)^T - 5 \cdot (3, 2, 1)^T = (-11, -2, 7)^T$$
   □

2. Legyen $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ egy olyan szimmetrikus bilineáris lekepézés (függvény), hogy
   $$\phi(\bar{v}_1, \bar{v}_1) = 3, \quad \phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = 4, \quad \phi(\bar{v}_2, \bar{v}_2) = 7.$$
   Mennyi $\phi(2\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2, \bar{v}_1 - \bar{v}_2)$?
   M:
   A bilinearitas miatt
   $$\begin{gathered} \phi(2\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2, \bar{v}_1 - \bar{v}_2) \\ = (2 \cdot 1 \cdot 3) \cdot \phi(\bar{v}_1, \bar{v}_1) + (2 \cdot (-1) \cdot 4)\phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2) + (3 \cdot 1 \cdot 4)\phi(\bar{v}_2, \bar{v}_1) + (3 \cdot (-1) \cdot 7)\phi(\bar{v}_2, \bar{v}_2) \end{gathered}$$
   A szimmetria miatt $\phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = \phi(\bar{v}_2, \bar{v}_1) = 4$, így a végeredmény -93.
   □

3. Legyen $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ egy olyan szimmetrikus bilineáris lekepézés (függvény), hogy
   $$\phi(\bar{v}_1, \bar{v}_1) = 3, \quad \phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = \phi(\bar{v}_2, \bar{v}_1) = 4, \quad \phi(\bar{v}_2, \bar{v}_2) = 7.$$
   - Mennyi $\phi(\bar{v}_1 - \bar{v}_2, \bar{v}_1 - \bar{v}_2)$?
     M:
     □
   - (Koszinusz tétel) Legyen adott egy háromszög, amelynek két oldala $\sqrt{3}$ és $\sqrt{7}$ hosszúak, továbbá a közbezárt szögük koszinusza $4/(\sqrt{3} \cdot \sqrt{7})$. Mennyi a harmadik oldal? (Ez nem lesz a zh-ban.)

4. Legyen $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ egy olyan antiszimmetrikus bilineáris lekepézés (függvény), hogy $\phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = 13$. Mennyi $\phi(2\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2, \bar{v}_1 - \bar{v}_2)$?
   M:
   □

5. Legyen $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ egy olyan antiszimmetrikus multilinearis lekepézés, hogy

$$\phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = (1,2,3)^T, \quad \phi(\bar{v}_1, \bar{v}_3) = (1,0,0)^T, \quad \phi(\bar{v}_3, \bar{v}_2) = (0,0,3)^T.$$

Mennyi $\phi(2\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2, \bar{v}_1 - \bar{v}_3)$?
M:
□

6. Legyen $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ egy olyan antiszimmetrikus multilinearis leképezés, hogy

$$\phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) = 2.$$

Mennyi $\phi(2\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2, \bar{v}_1 - \bar{v}_3, 4\bar{v}_1 + 2\bar{v}_3)$?
M:
Az antiszimmetria miatt a kifejezés kifejtésében a

$$0 = \phi(\bar{v}_A, \bar{v}_A, \bar{v}_B) = \phi(\bar{v}_A, \bar{v}_B, \bar{v}_A),$$

stb. típusú tagok eleve nullák, így

$$\phi(2\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2, \bar{v}_1 - \bar{v}_3, 4\bar{v}_1 + 2\bar{v}_3) = (3 \cdot 1 \cdot 2) \cdot \phi(\bar{v}_2, \bar{v}_1, \bar{v}_3) + (1 \cdot (-1) \cdot 4) \cdot \phi(\bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_1)$$

Továbbá $\phi(\bar{v}_2, \bar{v}_1, \bar{v}_3) = -\phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) = -2$, mivel a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

permutáció páratlan. Hasonlóan ehhez a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

permutáció páros, így

$$2 = \phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) = \phi(\bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_1).$$

Tehát a végeredmény $6 \cdot (-2) - 4 \cdot 2 = -20$.
□

1.6. Determináns, inverz mátrix

1. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}.$$

Adj meg egy olyan egyenletrendszert, aminek az egyértelmű megoldása x, y, u, v !
M:

$$AA^{-1} = E,$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
vagyis
$$1x + 4y = 1 \qquad 1u + 4v = 0$$
$$3x + 2y = 0 \qquad 3u + 4v = 1$$

vagy

$$A^{-1}A = E,$$
$$\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
vagyis
$$1x + 3u = 1 \qquad 4x + 2u = 0$$
$$1y + 3v = 0 \qquad 4y + 2v = 1$$

□

2. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mennyi $(A^{-1})_{21}$, ha az indexálás 1-től kezdődik?
M:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Most toroljuk ki A-bol a 12-és elem (nem a 21-es!) sorát es oszlopát:

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 3 & * & 1 \\ 1 & * & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Így

$$(A^{-1})_{21} = \frac{1}{\det(A)}(-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{-2}(-1)^{1+2} \cdot (3 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = 1$$

Megjegyzés: Valóban

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \\ 1 & 2 & -7 \\ -(1/2) & -(3/2) & 5 \end{pmatrix}$$

□

3. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Mennyi A^{-1} ?
M:
A ortogonális mátrix, mivel az oszlopai skalárszorzatai 1 vagy nulla, attól függően, hogy az oszlopvektort önmagával, vagy egy másik oszloppal szorozzuk össze skalárisan. Így

$$A^{-1} = A^T = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

□

4. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Mennyi A^{-1} ?
M:
Mivel A ortogonális mátrix, így

$$A^{-1} = A^T = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

□

Mennyi A^{-1} ?

5. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mennyi A^{-1} ?
M:
□

6. Mennyi
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

7. Mennyi
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

8.
- Mennyi x, ha
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & x & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

  M:
$$\det(B) = -6 + x, \qquad |B| = 0 \implies x = 6.$$

  □

- Legyen
$$\bar{a} = (1,2,0), \quad \bar{b} = (3,x,0), \quad \bar{c} = (0,1,1).$$

  Mennyi x, ha ezek a vektorok nem alkotnak bázist?
  M:
  $x = 6$, mivel ezek a vektorok a mátrixunk sorai.
  □

- Legyen
$$\bar{a} = (1,3,0)^T, \quad \bar{b} = (2,x,1)^T, \quad \bar{c} = (0,0,1)^T.$$

  Mennyi x, ha ezek a vektorok nem alkotnak bázist?
  M:
  $x = 6$, mivel ezek a vektorok a mátrixunk oszlopai.
  □

9. Mennyi x, ha
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & x & x \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

10. Mennyi λ, ha
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

M:
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) - 2 \cdot 0 = 0 \quad \implies \quad \lambda = 1.$$

□

11. Mennyi λ, ha
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

M:
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) - 2 \cdot 4 = 0 \quad \implies \quad \lambda = 1 \pm 2\sqrt{2}.$$

□

12. Milyen paritásúak a következő permutációk?
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

M: páros, páratlan, páratlan, páratlan
□

2. Lin.Alg.Zh.2 feladatok

2.1. Sajatertekek, sajatvektorok

Sajatertekegyenlet:

$$\begin{aligned} A\bar{v} &= \lambda\bar{v}, \qquad \bar{v} \neq \bar{0} \\ A\bar{v} &= \lambda E\bar{v}, \\ (A-\lambda E)\bar{v} &= \bar{0}. \\ \text{Viszont} \quad (A-\lambda E)\bar{0} &= \bar{0}, \end{aligned}$$

tehat a linearis transzformacio $A - \lambda E$ nem egy az egyhez tipusu, vagyis nem invertalhato, tehat az egyenletunknek csak akkor lesz nemtrivialis $\bar{v} \neq \bar{0}$ megoldasa, ha

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Ebbol megkapjuk λ lehetseges ertekeit, ezutan $\bar{v}$ megkeresesehez mar csak egy linearis egyenlet megoldas szukseges.

1. *Tetel.* Tegyuk fel, hogy a $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n$ vektorok bazist alkotnak egy vektorterben es sajatvektorai A-nak, vagyis $A\bar{v}_i = \lambda_i\bar{v}_i$. Legyen S a $\bar{v}_i$ oszlopvektorokbol alkotott matrix. Ekkor

$$S^{-1}AS = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = D.$$

Itt $diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ azt a diagonalis matrixot jelenti, ahol nem nulla elemek csak a diagonalison vannak, az i-edik sorban ez az elem eppen λ_i. Továbbá

$$A = SDS^{-1}.$$

1. *Problema.* Keresd meg az A matrix sajatertekeit es sajatvektorait! Keresd meg azt as S hasonlosagi transzformaciot, ami dagonalizalja A-t, vagyis $D = S^{-1}AS$, ahol D diagonalis! Ird fel a v vektort a sajatvektorok linearis kombinaciojakent! Mennyi $A^{13}v$?

$$a)\ (7) \qquad b)\ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad e)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f)\ \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad g)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad h)\ \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Itt a v vektor erteke:

$$a)\ v = (8), \qquad b-f)\ v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad g-h)\ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. *Megoldas.* b)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sajatertekek: $\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = 2$,
Sajatvektorok:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Mivel A eleve diagonalis volt, ez a feladat trivialis, a sajatertekek a diagonalis elemek, a sajatvektorok pedig a standard bazis.

d)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sajatertekek egyenlete:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 1 \cdot 0 = 0$$

Sajatertekek: $\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = 2$.
Mivel a diagonalis alatt csupa 0 all, igy a sajatertekek automatikusan a diagonalis elemek.

Sajatvektorok egyenlete ($\lambda_1 = 3$-ra):

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

vagy

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 0 & 3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Innen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$. Ezek kozul valasztunk egy nem nulla vektort, pl. legyen $x = 1$.
Sajatvektorok:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Az A matrixot diagonalizalo hasonlosagi transzformacio:

$$D = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Itt S a v_1 es a v_2 oszlopvektorokbol allo matrix, illetve

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Mennyi $A^{13}v$?

$$A^{13}v = (SDS^{-1})^{13}v = SD^{13}S^{-1}v$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{13} & 0 \\ 0 & 2^{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

vagy

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \alpha v_1 + \beta v_2,$$

ahol

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix},$$

tehat

$$A^{13}v = A^{13}(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha\lambda_1^{13}v_1 + \beta\lambda_2^{13}v_2 = 4 \cdot 3^{13} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot 2^{13} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

f)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Sajatertekek: $\lambda_1 = 2 + 3i, \qquad \lambda_2 = 2 - 3i$,
Sajatvektorok:

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3i & 0 \\ 0 & 2-3i \end{pmatrix}$$

g) Mivel A a d) es az a) blokkok kombinacioja, igy ezen ket feladat eredmenyeit felhasznalva a kovetkezoket kapjuk:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Sajatertekek: $\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = 7, \qquad ,$
Sajatvektorok:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$D = S^{-1}AS$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Jegyzet a sajatertekekproblemarol: BME kurzus: Sajatertek, sajtvektor

1. Legyenek az $\vec{a} = (2+i, 3+2i)^T$, $\vec{b} = (1+4i, 5-i)^T$ vektorok a $\mathbb{C}^2$ veges dimenzios Hilbert-ter egy ortonormalt bazisaban megadva. Mennyi az $(\vec{a}, \vec{b})$ belso szorzat?
M:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\overline{2+i})(1+4i) + (\overline{3+2i})(5-i) = (2-i)(1+4i) + (3-2i)(5-i) = 19 - 6i.$$

$\square$

2. Milyen szoget zar be az Eukledeszi vektorter egy ortonormalt baziasaban megadott

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

matrix ket, kulonbozo sajatertekekehez tartozo sajatvektora?
M:
Mivel A valos szimmetrikus (igy onadjungalt) matrix, a kulonbozo sajatertekekehez tartozo sajatvektorai automatikusan merolegesek egymasra, tehat a keresett szog $90°$.
Megjegyzes: Ezt persze direkt modon is kiszamolhatjuk:

$$0 = \det(A - \lambda E) = 16 - 9\lambda + \lambda^2,$$
$$\lambda_1 = (9 - \sqrt{17})/2, \qquad \lambda_2 = (9 + \sqrt{17})/2,$$
$$(A - \lambda E)\vec{v}_i = \vec{0},$$
$$\vec{v}_1 = \left((-1+\sqrt{17})/4, 1\right)^T, \qquad \vec{v}_2 = \left((-1-\sqrt{17})/4, 1\right)^T,$$
$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0.$$

$\square$

2.2. Pivotalas

Jegyzet a pivotalasrol: Gazdaságmatematika, Dr. Nagy Tamás (2011)

1. a) Oldd meg a kovetkezo linearis egyenletrendszert:

$$\begin{array}{r} 5x_1 + 3x_2 + 0x_3 = 11 \\ 0x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 8 \\ -1x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 2 \end{array}, \qquad \text{vagyis} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Legyen $a_1 = 5i - k$, $a_2 = 3i + j$, $a_3 = 2j + k$, $b = 11i + 8j + 2k$. Fejezd ki b-t az a-k linearis kombinaciojakent!
c) Allitsd elo a $(11, 8, 2)$ vektort az $a_1 = (5, 0, -1)$, $a_2 = (3, 1, 0)$, $a_3 = (0, 2, 1)$ vektorok linearis kombinaciojakent!
Megoldas: (a p index a pivotelem poziciojat jeloli)

$$\left(\begin{array}{ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ e_1 & 5 & 3 & 0 & 11 \\ e_2 & 0 & 1_p & 2 & 8 \\ e_3 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ e_1 & 5 & 0 & -6 & -13 \\ a_2 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ e_3 & -1 & 0 & 1_p & 2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ e_1 & -1_p & 0 & 0 & -1 \\ a_2 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ a_3 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Vagyis $b = 1a_1 + 2a_2 + 3a_3$, illetve $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

Egy masik megoldas:

$$\left(\begin{array}{ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ e_1 & 5 & 3 & 0 & 11 \\ e_2 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ e_3 & -1_p & 0 & 1 & 2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ e_1 & 0 & 3 & 5 & 21 \\ e_2 & 0 & 1_p & 2 & 8 \\ a_1 & 1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ e_1 & 0 & 0 & -1_p & -3 \\ a_2 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ a_1 & 1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ a_3 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Mivel itt az utolso tablaban az a-k indexei nem a kanonikus sorrendben vannak, vigyazni kell a megoldas leolvasasaval!

2. a) Oldd meg a kovetkezo (tulhatarozott) linearis egyenletrendszert:

$$\begin{array}{r} 5x_1 + 3x_2 = 11 \\ 1x_1 + 1x_2 = 3 \\ -1x_1 + 2x_2 = 3 \end{array}, \qquad \text{vagyis} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Legyen $a_1 = 5i + j - k$, $a_2 = 3i + j + 2k$, $b = 11i + 3j + 3k$. Fejezd ki b-t az a-k linearis kombinaciojakent!
Megoldas:

$$\begin{pmatrix} & a_1 & a_2 & b \\ e_1 & 5 & 3 & 11 \\ e_2 & 1_p & 1 & 3 \\ e_3 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & a_1 & a_2 & b \\ e_1 & 0 & -2_p & -4 \\ a_1 & 1 & 1 & 3 \\ e_3 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & a_1 & a_2 & b \\ a_2 & 0 & 1 & 2 \\ a_1 & 1 & 0 & 1 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tehat $b = 1a_1 + 2a_2$ vagyis $x_1 = 1, x_2 = 2$.

3. a) Oldd meg a kovetkezo (tulhatarozott) linearis egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 &= 11 \\ 1x_1 + 1x_2 &= 3 \\ -1x_1 + 2x_2 &= 4 \end{aligned}, \qquad \text{vagyis} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) Legyen $a_1 = 5i + j - k$, $a_2 = 3i + j + 2k$, $b = 11i + 3j + 4k$. Fejezd ki b-t az a-k linearis kombinaciojakent!
Megoldas:

$$\begin{pmatrix} & a_1 & a_2 & b \\ e_1 & 5 & 3 & 11 \\ e_2 & 1_p & 1 & 3 \\ e_3 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & a_1 & a_2 & b \\ e_1 & 0 & -2_p & -4 \\ a_1 & 1 & 1 & 3 \\ e_3 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & a_1 & a_2 & b \\ a_2 & 0 & 1 & 2 \\ a_1 & 1 & 0 & 1 \\ e_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tehat nincs megoldas, mivel b nem fejezheto ki csak $a_{1,2}$-t hasznalva. az utolso tabla utolso oszlopa alapjan.

4. Oldd meg az

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (4)$$

alulhatarozott egyenlet(rendszert)!
Megoldas:
Egy partikularis megoldas, illetve a homogen $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ egyenlet ket megoldasa:

$$\text{part:} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{hom:} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Az altalanos megoldas: part.megold+(lin.komb. hom.megold.)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

5. Oldd meg az

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 15x_3 &= 35 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 &= 25 \end{aligned}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 15 \\ 2 & -1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 25 \end{pmatrix}$$

alulhatarozott egyenletrendszert!
Megoldas:

$$\begin{pmatrix} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ e_1 & 1_p & 2 & 15 & 35 \\ e_2 & 2 & -1 & 10 & 25 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ a_1 & 1 & 2 & 15 & 35 \\ e_2 & 0 & -5_p & -20 & -45 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ a_1 & 1 & 0 & 7 & 17 \\ a_2 & 0 & 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Tehat az altalanos megoldas:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ellenorzes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 15 \\ 2 & -1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 25 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 15 \\ 2 & -1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

6. Invertald a kovetkezo matrixot:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldas:

$$\left(\begin{array}{ccccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & 1_p & 2 & 0 & 1 & 0 \\ e_3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & 5 & 0 & -6 & 1 & -3 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ e_3 & -1 & 0 & 1_p & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & -1_p & 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ a_2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ a_3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -6 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 & 2 & -5 & 10 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -5 \end{array}\right),$$

tehat

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 2 & -5 & 10 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

mivel ellenorzeskeppen

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 2 & -5 & 10 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Invertald a kovetkezo matrixot:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Megoldas:

$$\left(\begin{array}{ccccc} & a_1 & a_2 & e_1 & e_2 \\ e_1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ e_2 & 2_p & 4 & 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccccc} & a_1 & a_2 & e_1 & e_2 \\ e_1 & 0 & 3_p & 1 & 0 \\ a_1 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccccc} & a_1 & a_2 & e_1 & e_2 \\ a_2 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

vagyis

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Mivel $a_{1,2}$ nem a kanonikus rendben all a fuggoleges cimkekben, az utolso tablaban fel kellett cserelni az elso es a masodik sort.
Ellenorzes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Szamitsd ki a kovetkezo matrix determinansat pivotalassal!

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldas:

$$\left(\begin{array}{cccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ e_1 & 5 & 3 & 0 \\ e_2 & 0 & 1_p & 2 \\ e_3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ e_1 & 5 & 0 & -6 \\ a_2 & 0 & 1 & 2 \\ e_3 & -1 & 0 & 1_p \end{array}\right), \left(\begin{array}{cccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ e_1 & -1_p & 0 & 0 \\ a_2 & 2 & 1 & 0 \\ a_3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

tehat $det(A) = 1_p \cdot 1_p \cdot (-1_p) = -1$, vagyis a pivotelemek szorzata -1, ez a keresett determinans, mivel az utolso tabla a 3×3 egysegmatrix.

9. Szamitsd ki a kovetkezo matrix determinansat pivotalassal!

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldas:

$$\left(\begin{array}{cccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ e_1 & 0 & 1_p & 2 \\ e_2 & 5 & 3 & 0 \\ e_3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & 0 & 1 & 2 \\ e_2 & 5 & 0 & -6 \\ e_3 & -1_p & 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & 0 & 1 & 2 \\ e_2 & 0 & 0 & -1_p \\ a_1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

tehat $det(A) = 1_p \cdot (-1_p) \cdot (-1_p) \cdot 1 = 1$, ahol a az utolso tenyezo 1, mivel az $(1, 2, 3) \to (2, 3, 1)$ permutacio paros. (Paratlan permutaciok eseteben ez a faktor -1 lenne.)

2.3. Sorter, oszlopter, stb.

1. Oldd meg pivotalassal a kovetkezo egyenletrenszert:

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6$$
$$6x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 12.$$

Keresd meg az egyutthatomatrix sorteret, oszlopteret, nullteret, es a transzponalt matrix nullteret! Add meg ezek dimenzioit es bazisait! Milyen jobb oldal eseten oldhato meg az egyenletrendszer?
M: Jelolesek:

$$A\bar{x} = \bar{b},$$
$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix},$$
$$x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + x_3\bar{a}_3 = \bar{b},$$
$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Pivottablak:

$$\left(\begin{array}{ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ e_1 & 3 & 4_p & 2 & 6 \\ e_2 & 6 & 8 & 4 & 12 \end{array}\right),$$
$$\left(\begin{array}{ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ a_2 & \frac{3}{4} & 1 & \frac{2}{4} & \frac{6}{4} \\ e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{1}$$

A pivotalas hatasa:

$$\begin{pmatrix} e_1 \; sor \\ e_2 \; sor \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_2 \; sor := \frac{1}{4_p} \cdot (e_1 \; sor) \\ e_2 \; sor := (e_2 \; sor) - \frac{8}{4_p} \cdot (e_1 \; sor) \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4_p} & 0 \\ -\frac{8}{4_p} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4_p & 2 & 6 \\ 6 & 8 & 4 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 1 & \frac{2}{4} & \frac{6}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Itt a pivotalast elvegzo 2×2 matrix az egysegmatrix modositasa, ahol az elso oszlopot valtoztattuk meg, mivel a 4_p pivotelem az elso sorban volt.

A vegso pivottablaban bennefoglalt informacio:

$$\bar{b} = \frac{6}{4}\bar{a}_2 = 0\bar{a}_1 + \frac{6}{4}\bar{a}_2 + 0\bar{a}_3 \implies \bar{x}_{part} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{6}{4} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\bar{x}_{part} = \bar{b},$$

$$\bar{a}_1 = \frac{3}{4}\bar{a}_2, \quad -1\bar{a}_1 + \frac{3}{4}\bar{a}_2 + 0\bar{a}_3 = \bar{0} \implies \bar{x}_{hom_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\bar{x}_{hom_1} = \bar{0},$$

$$\bar{a}_3 = \frac{2}{4}\bar{a}_2, \quad 0\bar{a}_1 + \frac{2}{4}\bar{a}_2 - 1\bar{a}_3 = \bar{0} \implies \bar{x}_{hom_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{4} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A\bar{x}_{hom_3} = \bar{0},$$

Az altalanos megoldas:

$$\bar{b} = \frac{6}{4}\bar{a}_2 + t_1\bar{0} + t_3\bar{0} = \frac{6}{4}\bar{a}_2 + t_1\left(-1\bar{a}_1 + \frac{3}{4}\bar{a}_2 + 0\bar{a}_3\right) + t_3\left(0\bar{a}_1 + \frac{2}{4}\bar{a}_2 - 1\bar{a}_3\right),$$

$$\bar{x}_{alt} = \bar{x}_{part} + t_1\bar{x}_{hom_1} + t_3\bar{x}_{hom_3}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{6}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{4} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{6}{4} \\ 0 \end{pmatrix} - x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{4} \\ -1 \end{pmatrix}$$

A megoldasban szereplo vektorok leolvashatoak a vegso pivottablabol keszitett tablazatbol (ez persze mar nem pivottabla).

$$\left(\begin{array}{ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ a_1 & -1 & & 0 & 0 \\ a_2 & \frac{3}{4} & 1 & \frac{2}{4} & \frac{6}{4} \\ a_3 & 0 & & -1 & 0 \end{array}\right). \tag{2}$$

Ide bemasoltuk a vegso pivottabla a cimkeju sorait, a b oszlopot feltoltottuk 0-val, mig az a oszlopokat nullakkal es egy darab -1-gyel. Mivel az a_2 sor szerepelt a vegso pivottablaban, igy a tablazatunkban az ő oszlopa nem tartalmaz extra informaciot.

A szamitasaink ellenorzese:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{6}{4} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{4} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

A kovetkezoekben az

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,$$
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

matrixhoz rendelheto negy alteret vizsgaljuk meg.

2.3.1. Oszlopter, kepter

Legyen

$$Oszlop(A) = \{x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + x_3\bar{a}_3 \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$
$$= \left\{x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R}\right\} = Span(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3).$$

Ekkor

$$A\bar{x} = \bar{b}\ megoldhato \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{b} \in Oszlop(A).$$

A

$$\left(\begin{array}{ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \mathbf{a_2} & \frac{3}{4} & 1 & \frac{2}{4} & \frac{6}{4} \\ e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

pivottabla alapjan az osszes $\bar{a}_i$ kifejezheto $\bar{a}_2$ segitsegevel, igy az egy elemu $\{\bar{a}_2\}$ halmaz egy bazisa $Oszlop(A)$-nak:

$$Oszlop(A) = Span(\bar{a}_2) = \{x_2\bar{a}_2 \mid x_2 \in \mathbb{R}\} = \left\{x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{R}\right\}$$
$$\dim Oszlop(A) = \dim Im(A) = \dim Span(\bar{a}_2) = rang(A) = 1,$$

ahol $rang(A)$ definicioja $(\dim Oszlop(A))$ erteke.

2.3.2. Nullter, magter

$$\left(\begin{array}{cccc} & \mathbf{a_1} & a_2 & \mathbf{a_3} \\ a_1 & -1 & & 0 \\ \mathbf{a_2} & \frac{3}{4} & 1 & \frac{2}{4} \\ a_3 & 0 & & -1 \end{array}\right). \tag{3}$$

Az $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_3}$ oszlopok adjak meg a homogen $A\bar{x}_{hom} = \bar{0}$ egyenlet megoldasainak egy bazisat (a -1 elemek elhelyezkedese miatt ezek szuksegszeruen linearisan fuggetlen vektorok). A homogen egyenlet megoldasainak alteret jeloljuk $Null(A) = \ker A$-val. Ekkor

$$\dim Null(A) = \dim \mathbb{R}^3 - rang(A) = 3 - 1 = 2.$$

Tehat

$$Null(A) = Span\,(\bar{a}_1, \bar{a}_3) = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 3/4 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2/4 \\ -1 \end{pmatrix} \mid t_{1,3} \in \mathbb{R} \right\}$$

2.3.3. Sorter, $Null(A)^{\perp}$

Definicio: Egy Eukledeszi V vektorter W alterenek a $W^{\perp}$ ortogonalis komplementere azon vektorok halmaza (altere), amelyek mindegyike meroleges W osszes vektorara.

Ekkor nyilvan

$$\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V.$$

A tovabbiakban az $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lekepezesben szereplo $\mathbb{R}^{2,3}$ vektorterekre mint Eukledeszi oszlopvektorokra tekintunk.

A sorai (oszoponkent felirva, transzponalva) mindegyike meroleges $Null(A)$ vektoraira , pl.:

$$A\bar{x}_{hom_1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3/4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 6 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3/4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3/4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3/4 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

(3)-nek az $\{\bar{a}_2\}$ bazisvektorokhoz tartozo sorai fuggetlenek egymastol (mivel esetunkben csak egy bazisvektor van, ez igy sajnos trivialis), igy a A sorai transzponaltjainak linearis kombinacioi altal alkotott altere es bazisa:

$$Sor(A) = \{y_1(3,\ 4,\ 2)^T + y_2(6,\ 8,\ 4)^T \ |y_i \in \mathbb{R}\} = Span((3/4,\ 1,\ 2/4)^T) = Span \left(\begin{pmatrix} 3/4 \\ 1 \\ 1/4 \end{pmatrix} \right),$$

$$\dim Sor(A) = \dim \mathbb{R}^3 - (\dim \mathbb{R}^3 - rang(A)) = rang(A),$$

tehat az A matrix sorai es oszlopai altal generalt vektorterek dimenzioi megegyeznek.

2.3.4. $Null(A^T)$

Hogyan eszleljuk az $A\bar{x} = \bar{b}$ egyenlet megoldhatosagat, vagyis azt, hogy $\bar{b} \in Oszlop(A)$?

$$\bar{b} \perp (Oszlop(A))^{\perp} \quad \Longleftrightarrow \quad (\bar{m}, \bar{b}) = 0, \ \ \forall \bar{m} \in (Oszlop(A))^{\perp}.$$

Ezt eleg $(Oszlop(A))^{\perp}$ egy bazisara ellenorizni.

$$\dim(Oszlop(A))^{\perp} = \dim \mathbb{R}^2 - rang(A) = 2 - 1 = 1,$$

Igaz, hogy

$$(Oszlop(A))^{\perp} = Null(A^T).$$

Valoban:

$$A^T\bar{y} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0, \quad \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = 0, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \text{stb.}$$

Esetunkben a megoldhatosagot a vegso pivottabla (e_2, b) elemenek a nulla volta biztositotta, vagyis az, hogy a

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4_p} & 0 \\ -\frac{8}{4_p} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$$

vektor masodik eleme (a vegso pivottabla megmarado e sorainak b oszlopaban allo elem) nulla. Igy esetunkben

$$Null(A^T) = Span\left(\left(-\frac{8}{4}, 1\right)^T\right).$$

□

2.4. $A = LU$ felbontas

(a) Oldd meg:

$$A\bar{x} = \bar{b},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 9 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 23 \end{pmatrix}$$

M:

$$\begin{pmatrix} I.\,sor \\ II.\,sor \\ III.\,sor \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} I.\,sor \\ II.\,sor\ -(2/1)\cdot I.\,sor \\ III.\,sor\ -(3/1)\cdot I.\,sor \end{pmatrix} :$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 9 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} I.\,sor \\ II.\,sor \\ III.\,sor \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} I.\,sor \\ II.\,sor \\ III.\,sor\ -(3/1)\cdot II.\,sor \end{pmatrix} :$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

igy

$$\ell_2 \ell_1 A = U,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 9 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Tehat

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 9 & 11 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$A = \ell_1^{-1} \ell_2^{-1} U = LU.$$

Az egyenletunk felirhato mint

$$LU\bar{x} = L\bar{y} = \bar{b},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

Innen $\bar{y} = L^{-1}\bar{b}$,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Tovabba $U\bar{x} = \bar{y},\ \bar{x} = U^{-1}\bar{y}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Persze az U^{-1}, L^{-1} inverzek explicit kiszamitasara nincs szukseg.
Megjegyzes: $L = \ell_1^{-1}\ell_2^{-1}$ konnyu kiszamitasa nem veletlen szerencse, peldaul

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tovabba

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$