

Lin.Alg.Zh.1-2 feladatok

Lehetséges feladatok listája az első ZH-ban:

- 1.1: 1-14.
1.2: (1a-f), (2a-d,g), 3, 4.
1.3: 1, 2, (3a-g,j,l,m), (4a-f), 7-11.
1.5: 1, 2, 4-6.
1.6: 1-10.

1. Lin.Alg.Zh.1 feladatok

1.1. 3d vektorok

Adott három vektor

$$\bar{a} = (0, 2, 4), \quad \bar{b} = (1, 1, 4), \quad \bar{c} = (0, 2, -4)$$

az \mathbb{R}^3 Euklideszi vektortérben egy ortonormált bázisban.

1. Mennyi az $\bar{a}\bar{b}$ skalárszorzat?

M:

$$\bar{a}\bar{b} = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 = 18$$

□

2. Mennyi az $\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b}$ vektoriális szorzat?

M:

$$\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = i \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - j \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (4, 4, -2)$$

□

3. Mennyi az $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ vegyesszorzat?

M:

$$v = (\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = (4, 4, -2)(0, 2, -4) = 16$$

vagy

$$v = (\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 16$$

□

4. Merőleges-e egymásra \bar{a} és \bar{b} ? Miért?

M:

Nem, mert az $s = 18$ skalárszorzat nem nulla.

□

5. Egy síkba esik-e \bar{a} , \bar{b} és \bar{c} ? Miért?

M:

Nem, mert az $v = 16$ vegyesszorzat nem nulla.

□

6. Mennyi az \bar{a} , \bar{b} vektorok által bezárt szög koszinusza?

M:

$$\cos \alpha = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = 3/\sqrt{10}$$

□

7. Mennyi az \bar{a} és \bar{b} vektorok által kifeszített paralelogramma területe?

M:

$$T_{par} = |\bar{a} \times \bar{b}| = |(4, 4, -2)| = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-2)^2} = 6$$

8. Mennyi az \bar{a} és \bar{b} vektorok által kifeszített háromszög területe?

M:

$$T_{harom} = \frac{T_{par}}{2} = 3$$

9. Mennyi az \bar{a} , \bar{b} és \bar{c} vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata?

M:

$$V_{pip} = |\bar{a}\bar{b}\bar{c}| = |v| = 16$$

10. Mennyi az \bar{a} , \bar{b} és \bar{c} vektorok által kifeszített tetraéder térfogata?

M:

$$V_{tetra} = \frac{V_{pip}}{6}$$

11. Milyen sodrású az \bar{a} , \bar{b} és \bar{c} vektorok által alkotott rendszer? Miért?

M:

Jobb, mivel

$$v = \bar{a}\bar{b}\bar{c} > 0$$

(Ha $v < 0$ balsodrású, míg $v = 0$ esetén a három vektor egy síkba esik.)

12. Bázist alkot-e \bar{a} , \bar{b} és \bar{c} ? Miért?

M:

Igen, mert

$$v = \bar{a}\bar{b}\bar{c} \neq 0$$

13. Mennyi \bar{c} -nek a \bar{c}_p merőleges vetülete \bar{c} -re?

M:

\bar{c}

14. Mennyi \bar{c} -nek a \bar{c}_p merőleges vetülete \bar{a} -re?

M: Az \bar{a} irányába mutató \bar{n}_a egységvektor:

$$\bar{n}_a = \frac{1}{|\bar{a}|} \bar{a} = \frac{1}{\sqrt{0^2 + 2^2 + 4^2}} (0, 2, 4) = \frac{1}{\sqrt{20}} (0, 2, 4).$$

Az ezen irányú vetület kiszámítása:

$$\bar{c}_p = (\bar{n}_a, \bar{c}) \bar{n}_a = \left(\frac{1}{\sqrt{20}} (0, 2, 4), (0, 2, -4) \right) \frac{1}{\sqrt{20}} (0, 2, 4) = \frac{-12}{20} \cdot (0, 2, 4) = (0, -6/5, -12/5)$$

Megjegyzés: Ha valaki hajlando komplikaltabb kepleteket is megjegyezni, akkor:

$$\bar{c}_p = \frac{\bar{a}\bar{c}}{|\bar{a}|^2} \cdot \bar{a} = \frac{-12}{20} \cdot (0, 2, 4) = (0, -6/5, -12/5)$$

Ugyanez a feladat oszlopvektorokat es matrixokat használva: Az \bar{n}_a oszlop vektorra történő merőleges vetítés matrix alakban:

$$\begin{aligned} \bar{c}_p &= (\bar{n}_a, \bar{c}) \bar{n}_a \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{20}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{20}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \frac{-12}{20} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= (\bar{n}_a \bar{n}_a^T) \bar{c} \\ &= \left(\frac{1}{(\sqrt{20})^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} (0 \ 2 \ 4) \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 8 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6/5 \\ -12/5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

15. Mennyi \bar{c} -nek a \bar{c}_t merőleges tükrözöttje \bar{c} -re?

M:

\bar{c}

16. Mennyi \bar{c} -nek a \bar{c}_t merőleges tükrözöttje \bar{a} -re?

M:

$$\bar{c}_t = 2\bar{c}_p - \bar{c} = (0, -22/5, -4/5)$$

17. Mennyi \bar{c} -nek a \bar{c}_p merőleges vetülete a \bar{c} és a \bar{a} vektorok által generált síkra?

M:

\bar{c}

18. Mennyi \bar{c} -nek a \bar{c}_p merőleges vetülete a \bar{a} és a \bar{b} vektorok által generált síkra?

M:

$$\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b} = (0, 2, -4),$$

$$\bar{c}_m = \frac{\bar{n}\bar{c}}{|\bar{n}|^2} \cdot n = (16/9, 16/9, -8/9),$$

$$\bar{c}_p = \bar{c} - \bar{c}_m = (-16/9, 2/9, -28/9)$$

19. Mennyi \bar{c} -nek a \bar{c}_t merőleges tükrözöttje a \bar{c} és a \bar{a} vektorok által generált síkra?

M:

\bar{c}

20. Mennyi \bar{c} -nek a \bar{c}_t merőleges tükrözöttje a \bar{a} és a \bar{b} vektorok által generált síkra?

M:

$$\bar{c}_t = \bar{c} - 2\bar{c}_m = (-32/9, -14/9, -20/9)$$

Gyakorlás

Ismételd meg a feladatot!

I.

$$\bar{a} = (3, 1, 1), \quad \bar{b} = (0, 4, 1), \quad \bar{c} = (1, 1, -5)$$

Megoldás:

$\frac{5}{\sqrt{187}}$	$\{-3, -3, 12\}$	$-\frac{66}{9\sqrt{2}}$	nem	nem
bal	igen	$\{1, 1, -5\}$	66	11
$\{-\frac{17}{11}, -\frac{13}{11}, \frac{53}{11}\}$	$\{1, 1, -5\}$	$\{-\frac{2}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{1}{9}\}$	$\{-\frac{3}{11}, -\frac{1}{11}, -\frac{1}{11}\}$	$\{1, 1, -5\}$
			$\{1, 1, -5\}$	$\{-\frac{13}{9}, -\frac{13}{9}, \frac{43}{9}\}$

II.

$$\bar{a} = (3, 1, 1), \quad \bar{b} = (0, 4, 1), \quad \bar{c} = (3, 9, 3)$$

Megoldás:

$\frac{5}{\sqrt{187}}$	$\{-3, -3, 12\}$	0	nem	igen
nem bazis	nem	$\frac{9}{\sqrt{2}}$	0	0
$\{\frac{93}{11}, -\frac{57}{11}, \frac{9}{11}\}$	$\{3, 9, 3\}$	$\{3, 9, 3\}$	$\{\frac{63}{11}, \frac{21}{11}, \frac{21}{11}\}$	$\{3, 9, 3\}$
	$\{3, 9, 3\}$	$\{3, 9, 3\}$	$\{3, 9, 3\}$	$\{3, 9, 3\}$

(Az első sorban az 1-5 kérdések válaszai vannak, stb.. Továbbá {} zárójelekben vannak a vektorok.)

1.2. Pontok, egyenesek, síkok

Adott három pont

$$P = (0, 2, 4), \quad Q = (1, 1, 4), \quad S = (3, 2, 6)$$

az \mathbb{R}^3 Euklideszi vektortérben egy ortonormált bázisban.

1. Írd fel a P és Q pontokat tartalmazó egyenes

- (a) parametrikus,
M:

$$\begin{aligned}\bar{v} &= Q - P = (1, -1, 0), \\ \bar{r}(t) &= P + t \cdot \bar{v} = (t, 2 - t, 4).\end{aligned}$$

□

- (b) illetve algebrai egyenleteit!
M:

$$\begin{aligned}x &= t, \quad 2 - t = y, \quad z = 4, \\ t = x, \quad t = 2 - y, \quad &\text{így az egyenest meghatározó két egyenlet:} \\ x &= 2 - y, \quad z = 4.\end{aligned}$$

□

- (c) Hol van az $O = (0, 0, 0)$ -hoz legközelebbi $K = \bar{r}(t_0)$ pont az egyenesen?
M:

$$\begin{aligned}0 &= \bar{r}(t_0) \cdot \bar{v} = (t_0, 2 - t_0, 4) \cdot (1, -1, 0) = -2 + 2t_0 \implies t_0 = 1, \\ K &= \bar{r}(1) = (1, 1, 4).\end{aligned}$$

□

- (d) Mennyi az egyenes távolsága az O origótól?
M:

$$|(1, 1, 4)| = 3\sqrt{2}.$$

□

- (e) Hol van az S -hez legközelebbi pont az egyenesen?
M:

$$\begin{aligned}0 &= (S - \bar{r}(t_0)) \cdot \bar{v} = (3 - t_0, t_0, 2) \cdot (1, -1, 0) = 3 - 2t_0 \implies t_0 = 3/2, \\ K &= \bar{r}(3/2) = (3/2, 1/2, 4).\end{aligned}$$

□

- (f) Mennyi az egyenes távolsága S -tol?
M:

$$|\overline{SK}| = |(3/2, 1/2, 4) - (3, 2, 6)| = \sqrt{17/2}.$$

□

Gyakorlás

Ismételd meg a feladatot!

I.

$$P = (1, 2, 2), \quad Q = (5, 3, 1), \quad S = (3, 0, 6)$$

Megoldás:

$$\begin{aligned}\bar{r}(t) &= \{4t + 1, t + 2, 2 - t\}, \quad \frac{x-1}{4} = y - 2 = 2 - z, \quad \left\{ \frac{1}{9}, \frac{16}{9}, \frac{20}{9} \right\}, \\ &\quad \frac{\sqrt{73}}{3}, \quad \left\{ \frac{13}{9}, \frac{19}{9}, \frac{17}{9} \right\}, \quad \frac{\sqrt{214}}{3}\end{aligned}$$

2.

$$P = (0, 2, 4), \quad Q = (1, 1, 4), \quad R = (1, 0, 1), \quad S = (3, 2, 6)$$

Keressd meg a P, Q, R pontokat tartalmazó síkot! Írd fel a sík

- (a) parametrikus,
M:

$$\begin{aligned}\bar{a} &= Q - P = (0, -1, 2), & \bar{b} &= R - P = (0, 2, -1), \\ \bar{r}(u, v) &= (1, 2 - u - 2v, 2 + 2u - v).\end{aligned}$$

- (b) illetve algebrai egyenleteit!
M:

$$\begin{aligned}\bar{n} &= \bar{a} \times \bar{b} = (5, -3, 1), \\ 0 &= \bar{n}[\bar{r} - P] = (5, -3, 1)(x - 0, y - (-1), z - 4), \\ &5x - 3y + z - 6 = 0.\end{aligned}$$

- (c) Mennyi az sík távolsága az origótól?
M:
 P -nek a \bar{p}_m merőleges vetülete \bar{n} -re

$$\bar{p}_m = \frac{\bar{n}P}{|\bar{n}|^2} \cdot \bar{n} = \left(\frac{6}{7}, -\frac{18}{35}, \frac{6}{35}\right), \quad \text{távolság} = |\bar{p}_m| = \frac{\bar{n}P}{|\bar{n}|} = \frac{6}{\sqrt{35}}.$$

Persze $\bar{p}_m = \bar{q}_m = \bar{r}_m$.

- (d) Hol van O merőleges vetülete a síkon?
M:
Ahol $\bar{p}_m = \left(\frac{6}{7}, -\frac{18}{35}, \frac{6}{35}\right)$.

- (e) Hol van O -nak a síkra történő merőleges tükrözöttje?
M:
Ahol $2\bar{p}_m = \left(\frac{12}{7}, -\frac{36}{35}, \frac{12}{35}\right)$.

- (f) Hol van S -nek a \bar{s}_{sik} merőleges vetülete a síkon?
M:
 S -nek a \bar{s}_{sik} merőleges vetülete \bar{n} -re

$$\bar{s}_m = \frac{\bar{n}S}{|\bar{n}|^2} \cdot \bar{n} = \left(\frac{15}{7}, -\frac{9}{7}, \frac{3}{7}\right),$$

$$\bar{s}_{sik} = S - (\bar{s}_m - \bar{p}_m) = \left(\frac{12}{7}, \frac{97}{35}, \frac{201}{35}\right)$$

- (g) Mennyi az sík távolsága S -tol?
M:

$$|\bar{s}_m - \bar{p}_m| = \frac{\bar{n}(S - P)}{|\bar{n}|} = \frac{9}{\sqrt{35}}$$

- (h) Hol van S -nak a síkra történő merőleges tükrözöttje?
M:

$$\bar{s}_{sik} = S - 2(\bar{s}_m - \bar{p}_m) = \left(\frac{3}{7}, \frac{124}{35}, \frac{192}{35}\right)$$

Gyakorlás

Ismételd meg a feladatot!

I.

$$P = (1, 2, 2), \quad Q = (1, 3, 1), \quad R = (0, 2, -4), \quad S = (3, 0, -1)$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} \bar{r}(u, v) = (1 - v, 2 + u, 2 - u - 6v), \quad 2 - 6x + y + z = 0, \quad \sqrt{2/19}, \quad (6/19, -(1/19), -(1/19)), \\ (12/19, -(2/19), -(2/19)), \quad (6/19, 17/38, -(21/38)), \quad 17/\sqrt{38}, \quad (-(45/19), 17/19, -(2/19)) \end{aligned}$$

3. Mennyi a $PQRST$ tetraéder térfogata?

M:

$$\bar{a} = Q - P = (-1, -1, 2), \quad \bar{b} = R - P = (-1, -2, -1), \quad \bar{c} = (1, 0, 4),$$

$$\text{Terfogat} = \frac{|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|}{6} = \frac{3}{2}$$

□

4. Hol van a PQR sík, továbbá az S és az $(1, 2, 3)$ pontokon áthaladó egyenes metszéspontja?

M:

Egyenes paraméteres egyenlete

$$\bar{r}(t) = (3 + 2t, 2, 6 + 3t).$$

Sík algebrai egyenlete

$$-6 + 5x - 3y + z = 0.$$

Ha metszéspontnál t értékek t_0 , akkor

$$-6 + 5 \cdot (3 + 2t_0) - 3 \cdot (2) + (6 + 3t_0) = 0, \quad \implies \quad t_0 = -9/13.$$

A metszéspont

$$\bar{r}(-9/13) = \left(\frac{21}{13}, 2, \frac{51}{13} \right).$$

□

1.3. Lineáris transzformációk

1. Legyen $\phi((x, y)^T) = (2x + 3y, 4x + 5y)^T$ és $\psi((x, y, z)^T) = (z, y - x)^T$.

(a) Mennyi a ϕ transzformáció F mátrixa?

M:

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 4x + 5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

□

(b) Mennyi a ψ transzformáció P mátrixa?

M:

$$\psi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z \\ y - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

□

(c) Mennyi a $\mu(\bar{v}) = \phi(\psi(\bar{v})) = (\phi \circ \psi)(\bar{v})$ transzformáció M mátrixa?

Mi köze van az eredménynek F és P -hez?

M:

$$M = FP = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

□

(d) Mennyi a $\nu(\bar{v}) = \psi(\phi(\bar{v})) = (\psi \circ \phi)(\bar{v})$ transzformáció N mátrixa?

Mi köze van az eredménynek F és P -hez?

M:

$$N = PF = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

lenne, de nem lehet elvégezni a mátrixszorzást. A $\nu = \psi \circ \phi$ kompozíció sincs értelmezve.

□

2. Legyen $\phi((x, y)) = (2x + 3y, 4x + 5y)$ és $\psi((x, y, z)) = (z, y - x)$.

(a) Mennyi a ϕ transzformáció F mátrixa?

M:

$$\phi((x \ y)) = (2x + 3y \ 4x + 5y) = (x \ y) \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = (x \ y) F$$

(b) Mennyi a ψ transzformáció P mátrixa?

M:

$$\phi((x \ y \ z)) = (z \ y - x) = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (x \ y) P$$

(c) Mennyi a $\mu(\bar{v}) = \phi(\psi(\bar{v})) = (\phi \circ \psi)(\bar{v})$ transzformáció M mátrixa?

Mi köze van az eredménynek F és P -hez?

M:

$$M = PF = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

A mátrixos sorrendje az előző oszlopvektoros feladatokhoz képest megfordult, és a felhasznált mátrixok az előzőek transzponáltjai.

(d) Mennyi a $\nu(\bar{v}) = \psi(\phi(\bar{v})) = (\psi \circ \phi)(\bar{v})$ transzformáció N mátrixa?

Mi köze van az eredménynek F és P -hez?

M:

$$N = FP = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

lenne, de nem lehet elvégezni a mátrixszorzást. A $\nu = \psi \circ \phi$ kompozíció sincs értelmezve.

3. Legyenek a feladat $(x, y)^T$ vektorai az \mathbb{R}^2 Euklideszi vektortérben egy ortonormált bázisban megadva mint oszlopvektorok. Számítsd ki a következő transzformációk hatását az $\bar{e}_1 = (1, 0)^T$ és a $\bar{e}_2 = (0, 1)^T$ ortonormált bázisvektorokra, illetve írd fel a lin.tr. mátrixát!

A megoldás elve: $A\bar{e}_1$ az A mátrix első oszlopa, míg $A\bar{e}_2$ az A mátrix második oszlopa. Így $A\bar{e}_1, A\bar{e}_2$ -bol mint oszlopvektorokból felépíthető az A mátrix.

(a) Az x tengelyre való merőleges vetítés,

M:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) az y tengelyre való merőleges vetítés,

M:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) az $x = y$ egyenesre való merőleges vetítés,

M:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(d) az x tengelyre való merőleges tükrözés,

M:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(e) az y tengelyre való merőleges tükrözés,

M:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(f) az $x = y$ egyenesre való merőleges tükrözés,

M:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

(g) az origóra való tükrözés,

M:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

□

(h) az x tengelyre való vetítés, ha a vetítés iránya párhuzamos az $x = y$ egyenessel,

M:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

(i) az x tengelyre való vetítés, ha a vetítés iránya párhuzamos az $x + y = 0$ egyenessel,

M:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

(j) a $\bar{n} = (\cos(30)^\circ, \sin(30)^\circ)^T$ vektorra való merőleges vetítés P_n mátrixa,

M:

$$\bar{n} = \begin{pmatrix} \sqrt{3/2} \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

$$P_n = \bar{n} \otimes \bar{n} = \bar{n}\bar{n}^T = \begin{pmatrix} \sqrt{3/2} \\ 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3/2} & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

□

(k) a $\bar{n} = (\cos(30)^\circ, \sin(30)^\circ)$ vektorra való merőleges tükrözés T_n mátrixa.

M:

$$T_n \bar{v} = 2P_n \bar{v} - \bar{v}, \implies T_n = 2P_n - E,$$

$$T_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

□

(l) 45° fokos elforgatás,

M:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

□

(m) 30° fokos elforgatás.

M:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3/2} & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3/2} \end{pmatrix}$$

□

4. Legyenek a feladat $(x, y, z)^T$ vektorai az \mathbb{R}^3 Euklideszi vektortérben egy ortonormált bázisban megadva mint oszlopvektorok. Számítsd ki a következő transzformációk hatását az $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\bar{e}_2 = (0, 1, 0)^T$ és a $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)^T$ ortonormált bázisvektorokra, illetve írd fel a lin.tr. mátrixát!

(a) Az y tengelyre való merőleges vetítés,

M:

$$\begin{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix}$$

□

(b) az z tengelyre való merőleges vetítés,

M:

$$\begin{pmatrix} & \\ & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

(c) az xy síkra való merőleges vetítés,

M:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix}$$

(d) az y tengelyre való merőleges tükrözés,

M:

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

(e) az $x = y$ síkra való merőleges tükrözés,

M:

$$\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

(f) az origóra való tükrözés,

M:

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

(g) az xy síkra való vetítés, ha a vetítés iránya párhuzamos a $(1, 0, 1)^T$ vektorral,

M:

$$\begin{pmatrix} 1 & & -1 \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix}$$

(h) az x tengelyre való vetítés, ha a vetítés iránya párhuzamos az $x + z = 0$ síkkal,

M:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

(i) a $\bar{n} = (\cos(30^\circ), 0, \sin(30^\circ))$ vektorra való merőleges vetítés,

M:

$$\bar{n} = \begin{pmatrix} \sqrt{3/2} \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

$$P_n = \bar{n} \otimes \bar{n} = \bar{n} \bar{n}^T = \begin{pmatrix} \sqrt{3/2} \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3/2} & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

(j) a $\bar{n} = (\cos(30^\circ), 0, \sin(30^\circ))$ vektorra való merőleges tükrözés,

M:

$$T_n \bar{v} = 2P_n \bar{v} - \bar{v}, \implies T_n = 2P_n - E,$$

$$T_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(k) merőleges vetítés az $x + y + z = 0$ síkra,

M:

$$\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 \ 1 \ 1)^T,$$

$$P_{sik} = E - \bar{n}\bar{n}^T = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

□

(l) merőleges tükrözés az $x + y + z = 0$ síkra.

M:

$$\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 \ 1 \ 1)^T,$$

$$T_{sik} = E - 2\bar{n}\bar{n}^T = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

□

5. Legyen $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$. Mennyi A , ha $A\bar{v}$ az a vektor, amelynek az

(a) i -edik eleme v_i szomszédainak (vagy szomszédjának, ha i 1 vagy 4) az átlaga?

M:

$$A\bar{v} = \begin{pmatrix} v_2 \\ (v_1 + v_3)/2 \\ (v_2 + v_4)/2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

□

(b) i -edik eleme v_i szomszédainak az átlaga, ahol az első és az utolsó elemeket is szomszédoknak tekintjük?

M:

$$A\bar{v} = \begin{pmatrix} (v_2 + v_4) \\ (v_1 + v_3)/2 \\ (v_2 + v_4)/2 \\ (v_1 + v_3)/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

□

(c) Ismételd meg a feladatot abban az esetben, ha a $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ és az $\bar{v}A$ vektorra érvényesek ugyanezek a feltételek!

M:

Ha sorvektorokat használunk, akkor transzponálni kell az előző mátrixokat, de mivel azok szimmetrikusak a transzponálásra nézve, így semmi sem változik.

□

6. (Hasonlósági transzformáció) Egy nyúlpopulációban a nyulak mind Szilveszterkor születtek, továbbá az egy éves nyulak 3, míg az ennél idősebbek 4 újszülöttet szülnék Szilveszterenként. A populációt jellemezhetjük a December 31-én, éppen az új nyulak születése előtt megmért

- $\bar{v} = (e, o)_v^T$
- $\bar{w} = (e, p)_w^T$

vektorokkal. (Itt e az egyévesek, o az öreg nyulak, míg p a teljes populáció létszámát jelölik. Az v, w indexek azt jelzik, hogy melyik koordináta rendszert használjuk ugyanannak a populációnak a leírására.)

(a) Ha a nyúlpopulációt leíró vektorok $A\bar{v}$ és $B\bar{w}$ lesznek egy év múlva, akkor mennyi

- A és
- B ?

M:

$$A_{v \leftarrow v} \bar{v} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{v \leftarrow v} \begin{pmatrix} e \\ o \end{pmatrix}_v, \quad A_{v \leftarrow v} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{v \leftarrow v}$$

$$B_{w \leftarrow w} \bar{w} = \begin{pmatrix} 3e + 4(p - e) \\ p + [3e + 4(p - e)] \end{pmatrix}_w = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}_{w \leftarrow w} \begin{pmatrix} e \\ o \end{pmatrix}_w, \quad B_{w \leftarrow w} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{w \leftarrow w}$$

□

(b) Ha $\bar{v} = S\bar{w}$, akkor mennyi S ?

M:

$$\begin{pmatrix} e \\ o \end{pmatrix}_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{v \leftarrow w} \begin{pmatrix} e \\ p \end{pmatrix}_w = S_{v \leftarrow w} \bar{w}$$

□

(c) Ha $\bar{w} = R\bar{v}$, akkor mennyi R ?

M:

$$\begin{pmatrix} e \\ p \end{pmatrix}_w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{w \leftarrow v} \begin{pmatrix} e \\ o \end{pmatrix}_v = R_{w \leftarrow v} \bar{v}$$

□

(d) Mi köze van S -nek R -hez?

M:

$$S^{-1} = R, \quad R^{-1} = S, \quad RS = SR = E.$$

Valóban:

$$SR = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

(e) Mi köze van R -nek és A -nak B -hez?

M:

$$B_{w \leftarrow w} = R_{w \leftarrow v} A_{v \leftarrow v} S_{v \leftarrow w} = R_{w \leftarrow v} A_{v \leftarrow v} (R_{w \leftarrow v})_{v \leftarrow w}^{-1}$$

Valóban:

$$B = RAS = RAR^{-1}, \\ \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

(f) Mi köze van S -nek és B -nek A -hoz?

M:

$$A_{v \leftarrow v} = S_{v \leftarrow w} B_{w \leftarrow w} R_{w \leftarrow v} = S_{v \leftarrow w} B_{w \leftarrow w} (S_{v \leftarrow w})_{w \leftarrow v}^{-1}$$

Valóban:

$$A = SBR = SBS^{-1}, \\ \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

7. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Mennyi $AB - BA + 3E$?

M:

$$\begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$$

□

8. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

• Mennyi $AB - 3E$?

M:

$$\begin{pmatrix} -10 & -12 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

□

- Mennyi $BA + 3E$?

M:

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

□

9. (Komplex számok) Legyen

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

továbbá legyen $\mathcal{K}(a, b) = aE + bI \in \text{Mat}_2(\mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}$. Itt I -re teljesül, hogy $I^2 = -E$.

- Írd fel az $A = \mathcal{K}(2, 3) + \mathcal{K}(4, 5)$ matrixot! Mennyi a, b , ha $A = \mathcal{K}(a, b)$?

M:

$$A = \mathcal{K}(2, 3) + \mathcal{K}(4, 5) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} = \mathcal{K}(2+4, 3+5).$$

Vagy $(2E + 3I) + (4E + 5I) = 6E + 8I$.

□

- Írd fel az $A = \mathcal{K}(2, 3)\mathcal{K}(4, 5)$ matrixot! Mennyi a, b , ha $A = \mathcal{K}(a, b)$?

M:

$$\begin{aligned} A = \mathcal{K}(2, 3)\mathcal{K}(4, 5) &= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 - 3 \cdot 5 & -(2 \cdot 5 + 3 \cdot 4) \\ 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 & 2 \cdot 4 - 3 \cdot 5 \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{K}(2 \cdot 4 - 3 \cdot 5, 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4). \end{aligned}$$

Vagy

$$\begin{aligned} (2E + 3I)(4E + 5I) &= 2 \cdot 4E^2 + 3 \cdot 5I^2 + 2 \cdot 5EI + 3 \cdot 4IE \\ &= 2 \cdot 4E + 3 \cdot 5(-E) + 2 \cdot 5I + 3 \cdot 4I = (2 \cdot 4 - 3 \cdot 5)E + (2 \cdot 5 + 3 \cdot 4)I \\ &= \mathcal{K}(2 \cdot 4 - 3 \cdot 5, 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4). \end{aligned}$$

Igy a $\mathcal{K}(a, b)$ alakban felírható matrixok halmaza $\text{Mat}_2(\mathbb{R})$ egy reszalgebrát alkotja (vagyis zárt az összeadásra, szorzásra és számmal való szorzásra nézve).

□

- Mennyi

$$A = \mathcal{K}(2, 3)\mathcal{K}(4, 5) - \mathcal{K}(4, 5)\mathcal{K}(2, 3).$$

M: A a zero matrix, mivel $EI = IE$. Így a reszalgebrák kommutatív.

□

- Mennyi $(\mathcal{K}(a, b))^{-1}$, ha legalább az egyik a és b közül nem nulla?

M: Invertáljuk az

$$A = \mathcal{K}(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

matrixot!

$$\begin{aligned} \det(A) &= a \cdot a - b \cdot (-b) = a^2 + b^2, \\ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} &\xrightarrow{\text{kieg.aldet.}} \begin{pmatrix} |a| & |b| \\ |-b| & |a| \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{transzp.}} \begin{pmatrix} |a| & |-b| \\ |b| & |a| \end{pmatrix} \xrightarrow{\pm} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{inverz}} A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tehát a zero matrixot leszámítva mindegyik $\mathcal{K}(a, b)$ elem invertálható a kommutatív reszalgebrákban. Ezért az így kapott struktúra egy test, más néven a komplex számtest \mathbb{C} .

□

10. Ismételd meg az előző feladatot, de most I helyett használd a

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrixot, ami teljesíti, hogy $J^2 = E$. A legfontosabb különbség az lesz, hogy ekkor lesznek nem zero,

$$aE + bJ = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

alaku matrixok amelyek nem invertalhatóak. Adj meg egy ilyen alaku nem invertalható nem zero matrixot!

M: Peldaul

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

mivel ennek a determinansa nulla.

□

11. Ismeteld meg az elozo feladatot, de most I helyett hasznald a

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrixot, ami teljesiti, hogy $J^2 = 0$. A legfontosabb kulonbseg az lesz, hogy ekkor lesznek nem zero,

$$aE + bJ = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

alaku matrixok amelyek nem invertalhatóak. Adj meg egy ilyen alaku nem invertalható nem zero matrixot!

M: Peldaul

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mivel ennek a determinansa nulla.

□

1.4. Inhomogén lin.tr. (affin tr.)

1. Legyen $\phi_{a,b}(x) = ax + b$. Ha $\phi_{a,b} \circ \phi_{c,d} = \phi_{e,f}$, akkor mennyi e és f ?

M:

$$\begin{aligned} \phi_{a,b} \circ \phi_{c,d}(x) &= \phi_{a,b}(\phi_{c,d}(x)) = \phi_{a,b}(cx + d) \\ &= a(cx + d) + b = acx + (ad + b) = \phi_{ac, ad+b}(x), \\ e &= ac, \quad f = ad + b. \end{aligned}$$

□

2. Legyen $f(x) = 3x + 4$, $x_0 = 44$. Mennyi $f^n(x_0)$?

M:

f fixpontja:

$$f(x_{fix}) = x_{fix}, \quad x_{fix} = 3x_{fix} + 4 \implies x_{fix} = -2.$$

Ha a fixpont az origó, akkor ebben a koordinátaarendésében f homogén lineáris lesz, így

$$f^n(x_0) = 3^n(44 - (-2)) + (-2).$$

□

3. Legyen $f(x) = x + 4$, $x_0 = 6$. Mennyi $f^n(x_0)$?

M:

Itt f -nek nincs fixpontja, viszont $f^n(x)$ egy számtani sorozat, így

$$f^n(x) = 6 + 4n.$$

□

4. Legyen $f(x) = 1.2x - 4$. Mennyi $f^n(99)$?

M:

f fixpontja:

$$f(x_{fix}) = x_{fix}, \quad x_{fix} = 1.2x_{fix} - 4 \implies x_{fix} = 20.$$

Ha a fixpont az origó, akkor ebben a koordinátaarendésében f homogén lineáris lesz, így

$$f^n(x_0) = 1.2^n(99 - 20) + 20.$$

□

5. Add meg az

$$\begin{pmatrix} 1.2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixnak a $\lambda = 1$ sajátértékéhez tartozó egyik sajátvektort!

M:

$$\begin{pmatrix} 1.2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2x - 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$1.2 \cdot 20 - 4 = 20,$$
$$\begin{pmatrix} 1.2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tehát a $\bar{v}_1 = (20, 1)^T$ vektor $\lambda = 1$ sajátértékű sajátvektora a feladat mátrixának. (\bar{v}_1 többszöröse szintén ilyen vektorok lennének.)

□

1.5. Linearitás, bilinearitás, multilinearitás

1. Legyen ϕ egy lineáris transzformáció, továbbá legyen

$$\phi(\bar{v}_1) = (1, 2, 3)^T, \quad \phi(\bar{v}_2) = (3, 2, 1)^T.$$

Mennyi $\phi(4\bar{v}_1 - 5\bar{v}_2)$?

M:

A linearitás miatt

$$\phi(4\bar{v}_1 - 5\bar{v}_2) = 4\phi(\bar{v}_1) - 5\phi(\bar{v}_2) = 4 \cdot (1, 2, 3)^T - 5 \cdot (3, 2, 1)^T = (-11, -2, 7)^T$$

□

2. Legyen $\phi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan szimmetrikus bilineáris leképezés (függvény), hogy

$$\phi(\bar{v}_1, \bar{v}_1) = 3, \quad \phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = 4, \quad \phi(\bar{v}_2, \bar{v}_2) = 7.$$

Mennyi $\phi(2\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2, \bar{v}_1 - \bar{v}_2)$?

M:

A bilinearitás miatt

$$\begin{aligned} & \phi(2\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2, \bar{v}_1 - \bar{v}_2) \\ &= (2 \cdot 1 \cdot 3) \cdot \phi(\bar{v}_1, \bar{v}_1) + (2 \cdot (-1) \cdot 4) \phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2) + (3 \cdot 1 \cdot 4) \phi(\bar{v}_2, \bar{v}_1) + (3 \cdot (-1) \cdot 7) \phi(\bar{v}_2, \bar{v}_2) \end{aligned}$$

A szimmetria miatt $\phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = \phi(\bar{v}_2, \bar{v}_1) = 4$, így a végeredmény -93 .

□

3. Legyen $\phi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan szimmetrikus bilineáris leképezés (függvény), hogy

$$\phi(\bar{v}_1, \bar{v}_1) = 3, \quad \phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = \phi(\bar{v}_2, \bar{v}_1) = 4, \quad \phi(\bar{v}_2, \bar{v}_2) = 7.$$

- Mennyi $\phi(\bar{v}_1 - \bar{v}_2, \bar{v}_1 - \bar{v}_2)$?

M:

□

- (Koszinusz tétel) Legyen adott egy háromszög, amelynek két oldala $\sqrt{3}$ és $\sqrt{7}$ hosszúak, továbbá a közbezárt szögük koszinusza $4/(\sqrt{3} \cdot \sqrt{7})$. Mennyi a harmadik oldal? (Ez nem lesz a zh-ban.)

4. Legyen $\phi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan antiszimmetrikus bilineáris leképezés (függvény), hogy $\phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = 13$. Mennyi $\phi(2\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2, \bar{v}_1 - \bar{v}_2)$?

M:

□

5. Legyen $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ egy olyan antiszimmetrikus multilineáris leképezés, hogy

$$\phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = (1, 2, 3)^T, \quad \phi(\bar{v}_1, \bar{v}_3) = (1, 0, 0)^T, \quad \phi(\bar{v}_3, \bar{v}_2) = (0, 0, 3)^T.$$

Mennyi $\phi(2\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2, \bar{v}_1 - \bar{v}_3)$?

M:

□

6. Legyen $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan antiszimmetrikus multilinearis leképezés, hogy

$$\phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) = 2.$$

Mennyi $\phi(2\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2, \bar{v}_1 - \bar{v}_3, 4\bar{v}_1 + 2\bar{v}_3)$?

M:

Az antiszimmetria miatt a kifejezés kifejtésében a

$$0 = \phi(\bar{v}_A, \bar{v}_A, \bar{v}_B) = \phi(\bar{v}_A, \bar{v}_B, \bar{v}_A),$$

stb. típusú tagok eleve nullák, így

$$\phi(2\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2, \bar{v}_1 - \bar{v}_3, 4\bar{v}_1 + 2\bar{v}_3) = (3 \cdot 1 \cdot 2) \cdot \phi(\bar{v}_2, \bar{v}_1, \bar{v}_3) + (1 \cdot (-1) \cdot 4) \cdot \phi(\bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_1)$$

Továbbá $\phi(\bar{v}_2, \bar{v}_1, \bar{v}_3) = -\phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) = -2$, mivel a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

permutáció páratlan. Hasonlóan ehhez a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

permutáció páros, így

$$2 = \phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) = \phi(\bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_1).$$

Tehát a végeredmény $6 \cdot (-2) - 4 \cdot 2 = -20$.

□

1.6. Determináns, inverz mátrix

1. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}.$$

Adj meg egy olyan egyenletrendszert, aminek az egyértelmű megoldása x, y, u, v !

M:

$$AA^{-1} = E,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

vagyis

$$1x + 4y = 1 \quad 1u + 4v = 0$$

$$3x + 2y = 0 \quad 3u + 4v = 1$$

vagy

$$A^{-1}A = E,$$

$$\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

vagyis

$$1x + 3u = 1 \quad 4x + 2u = 0$$

$$1y + 3v = 0 \quad 4y + 2v = 1$$

□

2. Számítsd ki az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

matrix A^{-1} inverzet!

M:

$$\det(A) = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 5 = 3,$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{kieg.aldet.}} \begin{pmatrix} |4| & |5| \\ |1| & |2| \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{transzpz.}} \begin{pmatrix} |4| & |1| \\ |5| & |2| \end{pmatrix} \xrightarrow{\pm} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{inverz}} A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 \\ -5/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

□

3. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mennyi $(A^{-1})_{21}$, ha az indexálás 1-től kezdődik?

M:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Most toroljuk ki A -ból a 12-és elem (nem a 21-es!) sorát és oszlopát:

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 3 & * & 1 \\ 1 & * & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Így

$$(A^{-1})_{21} = \frac{1}{\det(A)} (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{-2} (-1)^{1+2} \cdot (3 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = 1$$

Megjegyzés: Valóban

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \\ 1 & 2 & -7 \\ -(1/2) & -(3/2) & 5 \end{pmatrix}$$

□

4. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Mennyi A^{-1} ?

M:

A ortogonális mátrix, mivel az oszlopai skalárszorzatai 1 vagy nulla, attól függően, hogy az oszlopvektort önmagával, vagy egy másik oszloppal szorozzuk össze skalárisan. Így

$$A^{-1} = A^T = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

□

5. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Mennyi A^{-1} ?

M:

Mivel A ortogonális mátrix, így

$$A^{-1} = A^T = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

□

Mennyi A^{-1} ?

6. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mennyi A^{-1} ?

M:

□

7. Mennyi

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

8. Mennyi

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

9. • Mennyi x , ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & x & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

M:

$$\det(B) = -6 + x, \quad |B| = 0 \implies x = 6.$$

□

• Legyen

$$\bar{a} = (1, 2, 0), \quad \bar{b} = (3, x, 0), \quad \bar{c} = (0, 1, 1).$$

Mennyi x , ha ezek a vektorok nem alkotnak bázist?

M:

$x = 6$, mivel ezek a vektorok a mátrixunk sorai.

□

• Legyen

$$\bar{a} = (1, 3, 0)^T, \quad \bar{b} = (2, x, 1)^T, \quad \bar{c} = (0, 0, 1)^T.$$

Mennyi x , ha ezek a vektorok nem alkotnak bázist?

M:

$x = 6$, mivel ezek a vektorok a mátrixunk oszlopai.

□

10. Mennyi x , ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & x & x \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

11. Mennyi λ , ha

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

M:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(1 - \lambda) - 2 \cdot 0 = 0 \implies \lambda = 1.$$

□

12. Mennyi λ , ha

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

M:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(1 - \lambda) - 2 \cdot 4 = 0 \implies \lambda = 1 \pm 2\sqrt{2}.$$

□

13. Milyen paritásúak a következő permutációk?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

M: páros, páratlan, páratlan, páratlan

□

2. Lin. Alg. Zh.2 feladatok

2.1. Sajaterterek, sajátvektorok

Sajaterterek egyenlet:

$$\begin{aligned} A\bar{v} &= \lambda\bar{v}, & \bar{v} &\neq \bar{0} \\ A\bar{v} &= \lambda E\bar{v}, \\ (A - \lambda E)\bar{v} &= \bar{0}. \\ \text{Viszont } (A - \lambda E)\bar{0} &= \bar{0}, \end{aligned}$$

tehát a lineáris transzformáció $A - \lambda E$ nem egy az egyhez típusú, vagyis nem invertálható, tehát az egyenletünknek csak akkor lesz nemtrivialis $\bar{v} \neq \bar{0}$ megoldása, ha

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Ebből megkapjuk λ lehetséges értékeit, ezután \bar{v} megkereséséhez már csak egy lineáris egyenlet megoldás szükséges.

1. *Tétel.* Tegyük fel, hogy a $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ vektorok bázist alkotnak egy vektortérben és sajátvektorai A -nak, vagyis $A\bar{v}_i = \lambda_i\bar{v}_i$. Legyen S a \bar{v}_i oszlopvektorokból alkotott mátrix. Ekkor

$$S^{-1}AS = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D.$$

Itt $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ azt a diagonális mátrixot jelenti, ahol nem nulla elemek csak a diagonálison vannak, az i -edik sorban ez az elem éppen λ_i . Továbbá

$$A = SDS^{-1}.$$

1. *Probléma.* Keresd meg az A mátrix sajátterkeit és sajátvektorait! Keresd meg azt az S hasonlósági transzformációt, ami diagonalizálja A -t, vagyis $D = S^{-1}AS$, ahol D diagonális! Írd fel a v vektort a sajátvektorok lineáris kombinációjaként! Mennyi $A^{13}v$?

$$\begin{aligned} a) \quad (7) \quad b) \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad c) \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad d) \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad e) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ f) \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad g) \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad h) \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Itt a v vektor értéke:

$$a) \quad v = (8), \quad b-f) \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad g-h) \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. *Megoldás.* b)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sajaterterek: $\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2,$

Sajátvektorok:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Mivel A eleve diagonális volt, ez a feladat trivialis, a sajátteretek a diagonális elemek, a sajátvektorok pedig a standard bázis.

d)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sajaterterek egyenlete:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(3 - \lambda) - 1 \cdot 0 = 0$$

Sajaterterek: $\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2.$

Mivel a diagonális alatt csupa 0 áll, így a sajátteretek automatikusan a diagonális elemek.

Sajátvektorok egyenlete ($\lambda_1 = 3$ -ra):

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

vagy

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 0 & 3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Innen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$. Ezek közül választunk egy nem nulla vektort, pl. legyen $x = 1$.

Sajátvektorok:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Az A matrixot diagonalizáló hasonlósági transzformáció:

$$D = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Itt S a v_1 és a v_2 oszlopvektorokból álló matrix, illetve

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Mennyi $A^{13}v$?

$$\begin{aligned} A^{13}v &= (SDS^{-1})^{13}v = SD^{13}S^{-1}v \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{13} & 0 \\ 0 & 2^{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

vagy

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \alpha v_1 + \beta v_2,$$

ahol

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix},$$

tehát

$$A^{13}v = A^{13}(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha \lambda_1^{13} v_1 + \beta \lambda_2^{13} v_2 = 4 \cdot 3^{13} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot 2^{13} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

f)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Sajátértékek: $\lambda_1 = 2 + 3i$, $\lambda_2 = 2 - 3i$,

Sajátvektorok:

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3i & 0 \\ 0 & 2-3i \end{pmatrix}$$

g) Mivel A a d) és az a) blokkok kombinációja, így ezen két feladat eredményeit felhasználva a következőket kapjuk:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Sajátértékek: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 7$,

Sajátvektorok:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} D &= S^{-1}AS \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Jegyzet a sajátértékekproblemaról: BME kurzus: Sajátérték, sajátvektor

1. Legyenek az $\vec{a} = (2 + i, 3 + 2i)^T$, $\vec{b} = (1 + 4i, 5 - i)^T$ vektorok a \mathbb{C}^2 veges dimenziós Hilbert-ter egy ortonormált bazisában megadva. Mennyi az (\vec{a}, \vec{b}) belső szorzat?

M:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \overline{(2 + i)}(1 + 4i) + \overline{(3 + 2i)}(5 - i) = (2 - i)(1 + 4i) + (3 - 2i)(5 - i) = 19 - 6i.$$

□

2. Milyen szöveget zár be az Eukleideszi vektortér egy ortonormált bazisában megadott

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

matrix két, különböző sajátértékekehez tartozó sajátvektora?

M:

Mivel A valós szimmetrikus (így onadjungált) matrix, a különböző sajátértékekehez tartozó sajátvektorai automatikusan merőlegesek egymásra, tehát a keresett szög 90° .

Megjegyzés: Ezt persze direkt módon is kiszámolhatjuk:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda E) = 16 - 9\lambda + \lambda^2, \\ \lambda_1 &= (9 - \sqrt{17})/2, \quad \lambda_2 = (9 + \sqrt{17})/2, \\ (A - \lambda E)\vec{v}_i &= \vec{0}, \\ \vec{v}_1 &= \left((-1 + \sqrt{17})/4, 1 \right)^T, \quad \vec{v}_2 = \left((-1 - \sqrt{17})/4, 1 \right)^T, \\ (\vec{v}_1, \vec{v}_2) &= 0. \end{aligned}$$

□

2.2. Pivotalas

Jegyzet a pivotálásról: Gazdaságmatematika, Dr. Nagy Tamás (2011)

1. a) Oldd meg a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 0x_3 &= 11 \\ 0x_1 + 1x_2 + 2x_3 &= 8 \\ -1x_1 + 0x_2 + 1x_3 &= 2 \end{aligned}, \quad \text{vagyis} \quad \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- b) Legyen $a_1 = 5i - k$, $a_2 = 3i + j$, $a_3 = 2j + k$, $b = 11i + 8j + 2k$. Fejezd ki b -t az a -k lineáris kombinációjaként!

- c) Allítsd elő a $(11, 8, 2)$ vektort az $a_1 = (5, 0, -1)$, $a_2 = (3, 1, 0)$, $a_3 = (0, 2, 1)$ vektorok lineáris kombinációjaként!

Megoldás: (a p index a pivotelem pozícióját jelöli)

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ e_1 & 5 & 3 & 0 & 11 \\ e_2 & 0 & 1_p & 2 & 8 \\ e_3 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ e_1 & 5 & 0 & -6 & -13 \\ a_2 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ e_3 & -1 & 0 & 1_p & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ e_1 & -1_p & 0 & 0 & -1 \\ a_2 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ a_3 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Vagyis $b = 1a_1 + 2a_2 + 3a_3$, illetve $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

Egy másik megoldás:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ e_1 & 5 & 3 & 0 & 11 \\ e_2 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ e_3 & -1_p & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ e_1 & 0 & 3 & 5 & 21 \\ e_2 & 0 & 1_p & 2 & 8 \\ a_1 & 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ e_1 & 0 & 0 & -1_p & -3 \\ a_2 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ a_1 & 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ a_3 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mivel itt az utolsó tablában az a -k indexei nem a kanonikus sorrendben vannak, vigyazni kell a megoldás leolvásásával!

2. a) Oldd meg a következő (tulhatarozott) lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 &= 11 \\ 1x_1 + 1x_2 &= 3 \\ -1x_1 + 2x_2 &= 3 \end{aligned}, \quad \text{vagyis} \quad \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) Legyen $a_1 = 5i + j - k$, $a_2 = 3i + j + 2k$, $b = 11i + 3j + 3k$. Fejezd ki b -t az a -k lineáris kombinációjaként!
Megoldás:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b \\ e_1 & 5 & 3 & 11 \\ e_2 & 1_p & 1 & 3 \\ e_3 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b \\ e_1 & 0 & -2_p & -4 \\ a_1 & 1 & 1 & 3 \\ e_3 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b \\ a_2 & 0 & 1 & 2 \\ a_1 & 1 & 0 & 1 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tehát $b = 1a_1 + 2a_2$ vagyis $x_1 = 1, x_2 = 2$.

3. a) Oldd meg a következő (tulhatarozott) lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 &= 11 \\ 1x_1 + 1x_2 &= 3 \\ -1x_1 + 2x_2 &= 4 \end{aligned}, \quad \text{vagyis} \quad \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) Legyen $a_1 = 5i + j - k$, $a_2 = 3i + j + 2k$, $b = 11i + 3j + 4k$. Fejezd ki b -t az a -k lineáris kombinációjaként!
Megoldás:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b \\ e_1 & 5 & 3 & 11 \\ e_2 & 1_p & 1 & 3 \\ e_3 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b \\ e_1 & 0 & -2_p & -4 \\ a_1 & 1 & 1 & 3 \\ e_3 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b \\ a_2 & 0 & 1 & 2 \\ a_1 & 1 & 0 & 1 \\ e_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tehát nincs megoldás, mivel b nem fejezhető ki csak $a_{1,2}$ -t használva. az utolsó tábla utolsó oszlopa alapján.

4. Oldd meg az

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (4)$$

alulhatarozott egyenlet(rendszer)!

Megoldás:

Egy partikuláris megoldás, illetve a homogén $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ egyenlet két megoldása:

$$\text{part: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{hom: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Az általános megoldás: part.megold+(lin.komb. hom.megold.)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

5. Oldd meg az

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 15x_3 &= 35 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 &= 25 \end{aligned}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 15 \\ 2 & -1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 25 \end{pmatrix}$$

alulhatarozott egyenletrendszert!

Megoldás:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ e_1 & 1_p & 2 & 15 & 35 \\ e_2 & 2 & -1 & 10 & 25 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ a_1 & 1 & 2 & 15 & 35 \\ e_2 & 0 & -5_p & -20 & -45 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ a_1 & 1 & 0 & 7 & 17 \\ a_2 & 0 & 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Tehát az általános megoldás:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ellenorzes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 15 \\ 2 & -1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 25 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 15 \\ 2 & -1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

6. Invertald a kovetkezo matrixot:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldas:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & 1_p & 2 & 0 & 1 & 0 \\ e_3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & 5 & 0 & -6 & 1 & -3 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ e_3 & -1 & 0 & 1_p & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & -1_p & 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ a_2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ a_3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -6 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 & 2 & -5 & 10 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix},$$

tehat

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 2 & -5 & 10 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

mivel ellenorzeskeppen

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 2 & -5 & 10 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Invertald a kovetkezo matrixot:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Megoldas:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & e_1 & e_2 \\ e_1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ e_2 & 2_p & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & e_1 & e_2 \\ e_1 & 0 & 3_p & 1 & 0 \\ a_1 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & e_1 & e_2 \\ a_2 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

vagyis

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Mivel $a_{1,2}$ nem a kanonikus rendben all a fuggoleges cimkekben, az utolso tablaban fel kellett cserelni az elso es a masodik sort.

Ellenorzes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Szamitsd ki a kovetkezo matrix determinansat pivotalassal!

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldas:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ e_1 & 5 & 3 & 0 \\ e_2 & 0 & 1_p & 2 \\ e_3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ e_1 & 5 & 0 & -6 \\ a_2 & 0 & 1 & 2 \\ e_3 & -1 & 0 & 1_p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ e_1 & -1_p & 0 & 0 \\ a_2 & 2 & 1 & 0 \\ a_3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tehat $\det(A) = 1_p \cdot 1_p \cdot (-1_p) = -1$, vagyis a pivotelemek szorzata -1 , ez a keresett determinans, mivel az utolso tabla a 3×3 egysegmatrix.

9. Szamitsd ki a kovetkezo matrix determinansat pivotalassal!

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldas:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ e_1 & 0 & 1_p & 2 \\ e_2 & 5 & 3 & 0 \\ e_3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & 0 & 1 & 2 \\ e_2 & 5 & 0 & -6 \\ e_3 & -1_p & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & 0 & 1 & 2 \\ e_2 & 0 & 0 & -1_p \\ a_1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tehát $\det(A) = 1_p \cdot (-1_p) \cdot (-1_p) \cdot 1 = 1$, ahol a az utolsó tényező 1, mivel az $(1, 2, 3) \rightarrow (2, 3, 1)$ permutáció páros. (Paratlan permutációk esetében ez a faktor -1 lenne.)

2.3. Sorter, oszlopter, stb.

1. Oldd meg pivotálással a következő egyenletrendszert:

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6$$

$$6x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 12.$$

Keress meg az együtthatómatrix sorteret, oszlopteret, nullteret, és a transzponált mátrix nullteret! Add meg ezek dimenzióit és bázisait! Milyen jobb oldal esetén oldható meg az egyenletrendszer?

M: Jelölések:

$$A\bar{x} = \bar{b},$$

$$A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix},$$

$$x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + x_3\bar{a}_3 = \bar{b},$$

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Pivottablak:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ e_1 & 3 & 4_p & 2 & 6 \\ e_2 & 6 & 8 & 4 & 12 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ a_2 & \frac{3}{4} & 1 & \frac{2}{4} & \frac{6}{4} \\ e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

A pivotálás hatása:

$$\begin{pmatrix} e_1 \text{ sor} \\ e_2 \text{ sor} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_2 \text{ sor} := \frac{1}{4_p} \cdot (e_1 \text{ sor}) \\ e_2 \text{ sor} := (e_2 \text{ sor}) - \frac{8}{4_p} \cdot (e_1 \text{ sor}) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4_p} & 0 \\ -\frac{8}{4_p} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4_p & 2 & 6 \\ 6 & 8 & 4 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 1 & \frac{2}{4} & \frac{6}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Itt a pivotálást elvégző 2×2 mátrix az egységmátrix módosítása, ahol az első oszlopot változtattuk meg, mivel a 4_p pivotelem az első sorban volt.

A végleges pivottablóban bennefoglalt információ:

$$\bar{b} = \frac{6}{4}\bar{a}_2 = 0\bar{a}_1 + \frac{6}{4}\bar{a}_2 + 0\bar{a}_3 \implies \bar{x}_{part} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{6}{4} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\bar{x}_{part} = \bar{b},$$

$$\bar{a}_1 = \frac{3}{4}\bar{a}_2, \quad -1\bar{a}_1 + \frac{3}{4}\bar{a}_2 + 0\bar{a}_3 = \bar{0} \implies \bar{x}_{hom_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\bar{x}_{hom_1} = \bar{0},$$

$$\bar{a}_3 = \frac{2}{4}\bar{a}_2, \quad 0\bar{a}_1 + \frac{2}{4}\bar{a}_2 - 1\bar{a}_3 = \bar{0} \implies \bar{x}_{hom_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{4} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A\bar{x}_{hom_3} = \bar{0},$$

Az általános megoldás:

$$\begin{aligned}\bar{b} &= \frac{6}{4}\bar{a}_2 + t_1\bar{0} + t_3\bar{0} = \frac{6}{4}\bar{a}_2 + t_1\left(-1\bar{a}_1 + \frac{3}{4}\bar{a}_2 + 0\bar{a}_3\right) + t_3\left(0\bar{a}_1 + \frac{2}{4}\bar{a}_2 - 1\bar{a}_3\right), \\ \bar{x}_{alt} &= \bar{x}_{part} + t_1\bar{x}_{hom_1} + t_3\bar{x}_{hom_3} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{6}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{4} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{6}{4} \\ 0 \end{pmatrix} - x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{4} \\ -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

A megoldásban szereplő vektorok leolvashatóak a végso pivottablából készített tablazatból (ez persze már nem pivottabla).

$$\begin{pmatrix} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ a_1 & -1 & & & 0 \\ a_2 & \frac{3}{4} & 1 & \frac{2}{4} & \frac{6}{4} \\ a_3 & 0 & & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Ide bemasoltuk a végso pivottabla a címkeű sorait, a b oszlopot feltöltöttük 0-val, míg az a oszlopokat nullakkal és egy darab -1 -gyel. Mivel az a_2 sor szerepelt a végso pivottablában, így a tablazatunkban az $\bar{0}$ oszlopa nem tartalmaz extra információt.

A számításaink ellenőrzése:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{6}{4} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{4} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

A következőekben az

$$\begin{aligned}A &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ A &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

matrixhoz rendelhető négy alteret vizsgáljuk meg.

2.3.1. Oszlopter, kepter

Legyen

$$\begin{aligned}Oszlop(A) &= \{x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + x_3\bar{a}_3 \mid x_i \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R}\right\} = Span(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3).\end{aligned}$$

Ekkor

$$A\bar{x} = \bar{b} \text{ megoldható} \iff \bar{b} \in Oszlop(A).$$

A

$$\begin{pmatrix} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \mathbf{a}_2 & \frac{3}{4} & 1 & \frac{2}{4} & \frac{6}{4} \\ e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

pivottabla alapján az összes \bar{a}_i kifejezhető \bar{a}_2 segítségével, így az egy elemű $\{\bar{a}_2\}$ halmaz egy bazisa $Oszlop(A)$ -nak:

$$\begin{aligned}Oszlop(A) &= Span(\bar{a}_2) = \{x_2\bar{a}_2 \mid x_2 \in \mathbb{R}\} = \left\{x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{R}\right\} \\ \dim Oszlop(A) &= \dim Im(A) = \dim Span(\bar{a}_2) = rang(A) = 1,\end{aligned}$$

ahol $rang(A)$ definíciója ($\dim Oszlop(A)$) értéke.

2.3.2. Nullter, magter

$$\begin{pmatrix} & \mathbf{a}_1 & a_2 & \mathbf{a}_3 \\ a_1 & -1 & & 0 \\ \mathbf{a}_2 & \frac{3}{4} & 1 & \frac{2}{4} \\ a_3 & 0 & & -1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3$ oszlopok adják meg a homogen $A\bar{x}_{hom} = \bar{0}$ egyenlet megoldásainak egy bazisát (a -1 elemek elhelyezkedése miatt ezek szüksegszeruen linearisan független vektorok). A homogen egyenlet megoldásainak alteret jelöljük $Null(A) = \ker A$ -val. Ekkor

$$\dim Null(A) = \dim \mathbb{R}^3 - rang(A) = 3 - 1 = 2.$$

Tehat

$$Null(A) = Span(\bar{a}_1, \bar{a}_3) = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 3/4 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2/4 \\ -1 \end{pmatrix} \mid t_{1,3} \in \mathbb{R} \right\}$$

2.3.3. Sorter, $Null(A)^\perp$

Definicio: Egy Euklideszi V vektortér W alterének a W^\perp ortogonális komplementere azon vektorok halmaza (altere), amelyek mindegyike meroleges W osszes vektorara.

Ekkor nyilván

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V.$$

A továbbiakban az $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lekepezesben szereplo $\mathbb{R}^{2,3}$ vektorterekre mint Euklideszi oszlopvektorokra tekintünk.

A sorai (oszoponként felírva, transzponálva) mindegyike meroleges $Null(A)$ vektoraira, pl.:

$$\begin{aligned} A\bar{x}_{hom_1} &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3/4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 6 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3/4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}, \\ (6 \ 8 \ 4) \begin{pmatrix} -1 \\ 3/4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 &\iff \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3/4 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \end{aligned}$$

(3)-nek az $\{\bar{a}_2\}$ bazisvektorokhoz tartozo sorai függetlenek egymastól (mivel esetunkben csak egy bazisvektor van, ez így sajnos trivialis), így a A sorai transzponáltjainak lineáris kombinációi által alkotott altere és bazisa:

$$\begin{aligned} Sor(A) &= \{y_1(3, 4, 2)^T + y_2(6, 8, 4)^T \mid y_i \in \mathbb{R}\} = Span((3/4, 1, 2/4)^T) = Span\left(\begin{pmatrix} 3/4 \\ 1 \\ 1/4 \end{pmatrix}\right), \\ \dim Sor(A) &= \dim \mathbb{R}^3 - (\dim \mathbb{R}^3 - rang(A)) = rang(A), \end{aligned}$$

tehát az A matrix sorai és oszlopai által generált vektorterek dimenziói megegyeznek.

2.3.4. $Null(A^T)$

Hogyan észleljük az $A\bar{x} = \bar{b}$ egyenlet megoldhatóságát, vagyis azt, hogy $\bar{b} \in Oszlop(A)$?

$$\bar{b} \perp (Oszlop(A))^\perp \iff (\bar{m}, \bar{b}) = 0, \quad \forall \bar{m} \in (Oszlop(A))^\perp.$$

Ezt elég $(Oszlop(A))^\perp$ egy bazisára ellenőrizni.

$$\dim(Oszlop(A))^\perp = \dim \mathbb{R}^2 - rang(A) = 2 - 1 = 1,$$

Igaz, hogy

$$(Oszlop(A))^\perp = Null(A^T).$$

Valóban:

$$\begin{aligned} A^T \bar{y} &= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \\ (3 \ 6) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0, \quad \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = 0, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \text{stb.} \end{aligned}$$

Esetünkben a megoldhatóságot a vegso pivottabla (e_2, b) elemenek a nulla volta biztosította, vagyis az, hogy a

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4p} & 0 \\ -\frac{8}{4p} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$$

vektor masodik eleme (a vegso pivottabla megmarado e sorainak b oszlopaban allo elem) nulla. Igy esetünkben

$$\text{Null}(A^T) = \text{Span} \left(\left(-\frac{8}{4}, 1 \right)^T \right).$$

□

2.4. $A = LU$ felbontas

(a) Oldd meg:

$$A\bar{x} = \bar{b},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 9 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 23 \end{pmatrix}$$

M:

$$\begin{pmatrix} I. \text{ sor} \\ II. \text{ sor} \\ III. \text{ sor} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I. \text{ sor} \\ II. \text{ sor} - (2/1) \cdot I. \text{ sor} \\ III. \text{ sor} - (3/1) \cdot I. \text{ sor} \end{pmatrix} :$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 9 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} I. \text{ sor} \\ II. \text{ sor} \\ III. \text{ sor} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I. \text{ sor} \\ II. \text{ sor} \\ III. \text{ sor} - (3/1) \cdot II. \text{ sor} \end{pmatrix} :$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

igy

$$\ell_2 \ell_1 A = U,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 9 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Tehat

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 9 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

$$A = \ell_1^{-1} \ell_2^{-1} U = LU.$$

Az egyenletünk felirható mint

$$LU\bar{x} = L\bar{y} = \bar{b},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

Innen $\bar{y} = L^{-1}\bar{b}$,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Tovabba $U\bar{x} = \bar{y}$, $\bar{x} = U^{-1}\bar{y}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Persze az U^{-1}, L^{-1} inverzek explicit kiszamitasara nincs szukseg.

Megjegyzes: $L = \ell_1^{-1}\ell_2^{-1}$ konnyu kiszamitasa nem veletlen szerencse, peldaul

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tovabba

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□