

Név:

1. $((2+1+2)+(1+2)+2)$ pont)A) Legyen $f: ((x, y, z)^T) \rightarrow (y - z + 2x, 3y - 4x - z)^T$ és $g: ((x, y)^T) \rightarrow (x - y, 3y + 2x)^T$.a) Írd fel az f és g transzformációk F, G mátrixait!

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & -1 \end{bmatrix}}_F \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_G = \begin{bmatrix} 2x + y - z \\ -4x + 3y - z \end{bmatrix}, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}_G \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_G = \begin{bmatrix} x - y \\ 2x + 3y \end{bmatrix}$$

b) Abban az esetben, ha létezik, mennyi az $f \circ g$ transzformáció mátrixa?

$$FG = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \downarrow 2 \\ \downarrow 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \downarrow 2 \neq 3 \\ \downarrow 2 \neq 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{nem lehet elvégezni a szorzást,} \\ \text{NINCS fog} \end{matrix}$$

Vagy! $\mathbb{R}^2 \xleftarrow{f} \mathbb{R}^3 \quad \mathbb{R}^2 \xleftarrow{g} \mathbb{R}^2$ NEM egyeznek meg, NINCS fog

c) Abban az esetben, ha létezik, mennyi az $g \circ f$ transzformáció mátrixa?

$$GF = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -8 & 11 & -5 \end{bmatrix}$$

B) Legyen $f: ((x, y, z)^T) \rightarrow (x + 2y + 3z)^T$ és $f: ((z)^T) \rightarrow (x, 5y, 7z)^T$. $g: ((z)^T) \rightarrow (z, 5z, 7z)^T$ a) Írd fel az f és g transzformációk F, G mátrixait!

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}}_F \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_G = [x + 2y + 3z] \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}}_G \underbrace{\begin{bmatrix} z \end{bmatrix}}_G = \begin{bmatrix} z \\ 5z \\ 7z \end{bmatrix}$$

b) Abban az esetben, ha létezik, mennyi az $f \circ g$ transzformáció mátrixa?

$$FG = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = [32] \quad \text{1} \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 = 32$$

c) Abban az esetben, ha létezik, mennyi az $g \circ f$ transzformáció mátrixa?

$$GF = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 10 & 15 \\ 7 & 14 & 21 \end{bmatrix}$$

Megjegyzés: Sajnos a táblára felírt verzióban a T lemaradt:

 $g((z)^T) \rightarrow (z, 5z, 7z)$, ekkor G -t így lehetne értelmezni:

$$(z, 5z, 7z) = (z) \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}}_G$$

Ha valaki ezt a G verziót oldja meg és elmagyarázza, mik lesznek a problémák a b,c részfeladatokban, az is helyes megoldásnak számít.

$$4 + (1+1+1+1+2)$$

4. (3+3=6 pont)

A) Legyen $\vec{n}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T$, $\vec{n}_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})^T$, $\vec{r} = (5, 6)^T$. Ha $\vec{r} = \alpha_1 \vec{n}_1 + \alpha_2 \vec{n}_2$ akkor mennyi α_1 és α_2 ?

$\vec{n}_1, \vec{n}_2$ ortonormált bázis:

$$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \left(\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0, \quad |\vec{n}_1| = |\vec{n}_2| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\text{Ezért } (\vec{n}_1, \vec{r}) = \alpha_1 \underbrace{(\vec{n}_1, \vec{n}_1)}_{=1} + \alpha_2 \underbrace{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}_{=0} = \alpha_1, \quad (\vec{n}_2, \vec{r}) = \alpha_2$$

$$\text{Tehát } \alpha_1 = \left(\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 5 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 6 = \frac{11}{\sqrt{2}}, \quad \alpha_2 = \left(\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 5 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 6 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

B) Legyen $\vec{a} = (3, 3, 3)$, $\vec{b} = (2, 0, 4)$. Mennyi

- az $\vec{a}\vec{b}$ skalárszorzat,

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 18$$

- az $\vec{a}$ és a $\vec{b}$ vektorok által bezárt szög koszinusza,

$$\text{Mivel } (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha, \text{ így}$$

$$\cos \alpha = \frac{18}{\sqrt{3^2+3^2+3^2} \cdot \sqrt{2^2+0^2+4^2}} = \frac{18}{\sqrt{27} \cdot 2\sqrt{20}} = \frac{18}{\sqrt{540}}$$

- az $\vec{a}$ és a $\vec{b}$ oldalú paralelogramma területe?

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 12\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k} = (12, -6, -6) = 6(2, -1, -1)$$

$$T_{\square} = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{12^2 + (-6)^2 + (-6)^2} = 6 \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = 6 \cdot \sqrt{6}$$

- az $\vec{a}$ és a $\vec{b}$ oldalú háromszög területe?

$$T_{\Delta} = \frac{1}{2} T_{\square} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{6}$$

- Mennyi az $\vec{a}$ vektor $\vec{b}$ vektorra vetülete?

$$\vec{B} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2^2+0^2+4^2}} \cdot (2, 0, 4) = \frac{1}{\sqrt{20}} (2, 0, 4)$$

$$\text{Vetület: } (\vec{B}, \vec{a}) \vec{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{20}} (2, 0, 4), (3, 3, 3) \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{20}} (2, 0, 4) = \frac{1}{20} \cdot 18 \cdot (2, 0, 4) = \frac{18}{10} \cdot (1, 0, 2) = \left(\frac{18}{10}, 0, \frac{36}{10} \right)$$

3. (1+1+2+2+4 pont)

Adott öt pont

$$P = (0, 2, 0), \quad Q = (0, 0, 2), \quad R = (3, 0, 3), \quad S = (4, 4, 4), \quad T = (5, 5, 5)$$

az $\mathbb{R}^3$ Euklideszi vektortérben egy ortonormált bázisban.

a) Írd fel a S és T pontokat tartalmazó egyenes parametrikus egyenletét!

$$\vec{V} = \vec{ST} = T - S = (1, 1, 1)$$

$$\vec{r}(t) = S + t\vec{V} = (4, 4, 4) + t \cdot (1, 1, 1) = (4+t, 4+t, 4+t)$$

Megjegyzés: Az eredeti $R = (0, 3, 3)$ feladat megoldásait szintén helyesnek fogadjam el.

c) $x=0$, e) távolság = 0

b) Írd fel a S és T pontokat tartalmazó egyenes algebrai egyenleteit!

$$\vec{r}(t) = (4+t, 4+t, 4+t) = (x, y, z)$$

$$4+t=x \quad 4+t=y \quad 4+t=z$$

$$t = x-4 = y-4 = z-4$$

$$\text{tehát} \quad \begin{matrix} x-4 = y-4 \\ y-4 = z-4 \end{matrix} \quad \text{vagy} \quad \begin{matrix} 1x - 1y + 0z = 0 \\ 0x + 1y - 1z = 0 \end{matrix}$$

c) Írd fel a P, Q és R pontokat tartalmazó sík algebrai egyenletét!

$$\vec{a} = \vec{PQ} = Q - P = (0, -2, 2) \quad \text{síkbeli vektorok}$$

$$\vec{b} = \vec{PR} = R - P = (3, -2, 3)$$

$$0 \cdot (-2) - (-2) \cdot 3 = 6$$

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k} = (-2, 6, 6)$$

$$\vec{n} \cdot [(x, y, z) - P] = 0 : -2(x-0) + 6(y-2) + 6(z-0) = 0$$

$$-2x + 6y + 6z = 12$$

$$\text{vagy} \quad -x + 3y + 3z = 4$$

$$\text{vagy} \quad -\frac{1}{\sqrt{19}}x + \frac{3}{\sqrt{19}}y + \frac{3}{\sqrt{19}}z = \frac{4}{\sqrt{19}}$$

d) Mennyi az egyenes és az origó távolsága?

$$\vec{r}(t) = (4+t, 4+t, 4+t) \rightarrow \vec{r}(-4) = (0, 0, 0), \text{ vagyis az origó rajta van az egyenesen} \rightarrow \text{távolság} = 0$$

e) Mennyi a sík és az origó távolsága?

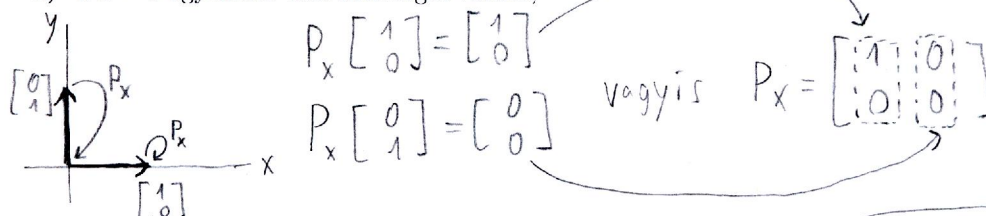
$$\vec{n} = (-2, 6, 6) \quad \vec{n}' = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + 6^2 + 6^2}} \cdot (-2, 6, 6) = \left(-\frac{1}{\sqrt{19}}, \frac{3}{\sqrt{19}}, \frac{3}{\sqrt{19}}\right)$$

$$\text{távolság: } |\vec{n}' \cdot P| = \left| \left(-\frac{1}{\sqrt{19}}, \frac{3}{\sqrt{19}}, \frac{3}{\sqrt{19}}\right) \cdot (0, 2, 0) \right| = \left| \frac{3}{\sqrt{19}} \cdot 2 \right| = \frac{6}{\sqrt{19}}$$

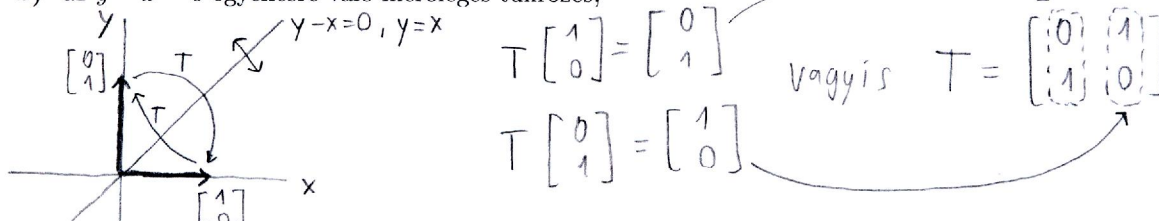
2. ((1+1+2)+(2+2)+2 pont) Írd fel a következő transzformációk mátrixait, ha az $\mathbb{R}^2$ vektorteret ortonormált bázisban az $(x, y)^T$ vektorokkal koordinátázzuk!

A) $\mathbb{R}^2$ -ben:

a) a $x = 0$ egyenesre való merőleges vetítés,



b) az $y - x = 0$ egyenesre való merőleges tükrözés,

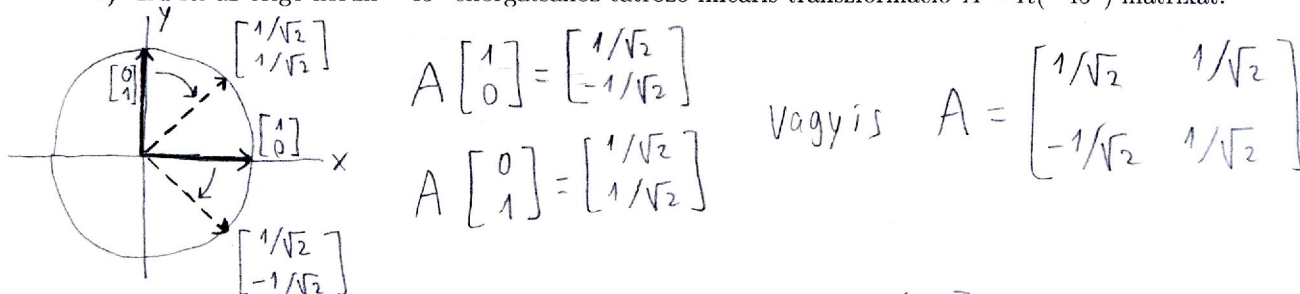


c) az origón átmenő, az $(-2, -3)^T$ vektorral párhuzamos egyenesre való merőleges vetítés,

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + (-3)^2}} \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{13} \\ -3/\sqrt{13} \end{bmatrix}$$

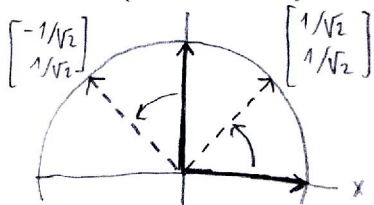
$$P_{\vec{n}} = \vec{n} \vec{n}^T = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{13} \\ -3/\sqrt{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/\sqrt{13} & -3/\sqrt{13} \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

d) Írd fel az origó körüli -45° elforgatáshoz tartozó lineáris transzformáció $A = R(-45^\circ)$ mátrixát!



e) Mennyi A^{-1} ?

$$A^{-1} = (R(-45^\circ))^{-1} = R(45^\circ) = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$



f) Mennyi A^3 ?

$$A^3 = R(-45^\circ)R(-45^\circ)R(-45^\circ) = R(-45^\circ - 45^\circ - 45^\circ) = R(-135^\circ)$$

