Lin.Alg.Hf.I. Geman153B

1. Kozepiskolai anyag ismetlese

1. Legyen

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ x + 2y &= 3. \end{aligned}$$

   - Szamold ki valahogyan x, y-t!
   - Rajzold le a a $2x + y = 3$ es $x + 2y = 3$ egyeneseket! Hol lesz az egyenesek metszespontja?

2.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ 4x + ay &= 9. \end{aligned}$$

   - Mennyi a, ha az egyenletrendszernek nincs megoldasa? Jeloljuk ezt az a erteket a_0-lal.
   - Mennyi b, ha a

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ 4x + a_0 y &= b \end{aligned}$$

     egyenletnek vegtelen sok megoldasa van? Ird fel valahogyan ebben az esetben az altalanos megoldast!
   -

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f. \end{aligned}$$

     Ennek az egyenletrendszernek lehet $1, 0, \infty$ megoldasa. Ha terveznel egy programot, ami (a, b, c, d, e, f) input-bol kiszamolna az (x, y) megoldast, akkor probalj talalni valamilyen esszeru adatstrukturat az output reprezentaciojara!

3. - Az (x_1, y_1) es (x_2, y_2) pontokon athalado egyenes egyenlete:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \quad \Longrightarrow \quad y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

   - Az (x_1, y_1) ponton athalado m meredeksegu egyenes (amelynek a pontjait az (x, y) pontok alkotjak) egyenlete:

$$y = y_1 + m(x - x_1).$$

   Probalj olyan abrakat rajzolni, amelyek "megmagyarazzak" ezeket az egyenleteket!

4. - Ird fel azoknak az egyeneseknek az egyenleteit, amelyeknek a meredeksege $m = 2$ es athaladnak a $P = (0,3)$ illetve a $Q = (6,7)$ pontokon!
   - Ird fel annak az egyenesnek az egyenletet, amely athalad a $P = (2,3)$ es a $Q = (6,9)$ pontokon!

5. Legyen

$$P = (1,2), \quad Q = (2,1), \quad R = (3,4), \quad S = (5,3).$$

   - Hol metszik egymast a P, Q, illetve az R, S pontokon athalado egyenesek?
   - Metszik-e egymast (es ha igen, akkor hol) a kovetkezo szakaszparok?

$$\overline{PQ} \text{ es } \overline{RS}, \qquad \text{illetve} \qquad \overline{PS} \text{ es } \overline{QR}.$$

   - Tudnal-e egy olyan algoritmust tervezni, amelyik megvalaszolna a masodik kerdest tetszoleges P, Q, R, S pontok eseten is?

6. Newton-Raphson modszer.

Feladat: Hogyan oldhatjuk meg kozelitoleg az $f(x^*) = 0$ egyenletet?

Modszer:

(a) Tippelj meg ket x_0, x_1 erteket x^* kozeleben!

(b) Ird fel az $(x_0, f(x_0))$ es az $(x_1, f(x_1))$ pontokon atmeno egyenes egyenletet, majd keresd meg az egyenes es az x-tengely metszespontjanak az x_2 poziciojat!

(c) Ird felul az x_0, x_1 ertekeket:

$$x_0 \leftarrow x_1, \qquad x_1 \leftarrow x_2.$$

(d) Vegezetul ismeteld meg ezt az (a),(b),(c) lepeseket nehanyszor, amig kello pontossagal meg nem kapod az $f(x^*) = 0$ egyenlet gyoket!

- Rajzolj egy abrat, amely illusztralja ezt az eljarast!
- Alkalmazd ezt a modszert az

$$f(x) = x^2 - 2$$

  fuggvenyre, azaz szamold ki $\sqrt{2}$-t! Mi lesz az eredmeny, ha $x_0 = 2$, $x_1 = 3$, illetve ha $x_0 = -2$, $x_1 = 0$? Hogyan valtozik az eredmeny pontossaga az ismetlesek szamatol fuggoen?

$$\sqrt[2]{2} = 1.41421356237309504880168872421...$$

- Hany tizedesjegy pontossaggal adja meg ez az eljaras $\sqrt{2}$-t, ha 16, 32, illetve ha 64 bites lebegopontos szamokat hasznalsz?
- Rajzolj le legalabb egy olyan fuggvenyt es egy x_0, x_1 kezdet tippet, ahol ez az eljaras NEM kozelit az x^* gyokhoz!
- Gondolkozz el azon, hogy hogyan lehetne valami hasonlo eljarast alkalmazni ketismeretlenes egyenletek megoldasara!

7. **A lapos Fold hipotezis pontossagarol.**

   - Az Egyenito egy ponjarol kiindulva menj x kilometert eloszor Keletre, majd Eszakra, azutan Nyugatra, vegul pedig Delre. Milyen messze leszel a kiindulasi ponttol, ha

$$x \quad = \quad 1\,km,\ 10\,km,\ 100\,km,\ 1000\,km.$$

   - Ismeteld meg ezt a feladatot az Egyenlito helyett Miskolcra!

   Magyarazd meg az eredmenyek kulonbozoseget! A feladatban tetelezzuk fel, hogy a Fold egy 6373 km sugaru gomb.

2. Gauss-Jordan eliminacio

Ezekben a feladatokban a linearis egyenletrendszereket kibovitett egyutthato matrixokkal reprezentaljuk. Peldaul a kovetkezo

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 &= 9 \end{aligned} \tag{1}$$

egyenletrendszer reprezentasa

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

1. - Szamitsd ki a (2) matrix lepcsos sor redukalt alakjat!
   - A kapott eredmeny alapjan ird fel (1) altalanos megoldasat!

2. Legyen

$$m_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad m_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad m_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$m_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad m_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$m_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   - Ezen matrixok kozul melyek lepcsos sor redukalt alakuak?
   - A lepcsos sor redukalt alakuak kozul melyek reprezentalnak olyan egyenletrendszereket, amelyeknek nincs megoldasa?
   - A lepcsos sor redukalt alakuak kozul melyek reprezentalnak olyan egyenletrendszereket, amelyeknek van megoldasa? Ezekre ird fel az altalanos megoldast!

3. Linearis lekepezesek matrixai

Ezekben a feladatokban a transzponalas muveletet hasznaljuk sorvektorok oszlovektorra alakitasara, meg ugyanezt forditva is. Tehat pl.

$$(1,\,2)^T = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}^T = (1,\,2).$$

1. Mennyi $\big((1,2,3)^T\big)^T$?
2. Mely ϕ_i lekepezesek linearisak az alabbiak kozul? Linearitas azt ertjuk, hogy fennall barmely $\vec{u},\vec{v}$ vektorokra, hogy

   $$\phi(\vec{u}+\vec{v}) = \phi(\vec{u}) + \phi(\vec{v}), \qquad \phi(\lambda\vec{u}) = \lambda\phi(\vec{u}). \tag{3}$$

   A ϕ_i lekepezesek:

   $$\begin{aligned} \phi_1 :\ (x,y,z)^T \to (x-y)^T, &\quad \phi_2 :\ (x,y,z)^T \to (y-z-1)^T, \\ \phi_3 :\ (x,y,z)^T \to (x/z,y/z)^T, &\quad \phi_4 :\ (x,y,z)^T \to (x+1,z-1)^T, \\ \phi_5 :\ (x,y)^T \to (y^2-x,y+x)^T, &\quad \phi_6 :\ (x,y)^T \to (x+y,-y,-x)^T, \end{aligned}$$

   Ha a lekepezes nem linearis, akkor adj peldat olyan $\vec{u}$ es/vagy $\vec{v}$ vektorokra, amelyekre serulnek az (3)-ben felsorolt tulajdonsagok.
3. Ird fel az alabbi ϕ_i linearis lekepezesek F_i matrixait!
   (Vagyis F_i olyan, hogy $\forall\vec{v}\ \ \phi_i(\vec{v}) = F_i\vec{v}$.)

   $$\begin{aligned} \phi_1 :\ (x,y,z)^T \to (x,y,z)^T, &\quad \phi_2 :\ (x,y,z)^T \to (y,z,x)^T, \\ \phi_3 :\ (x,y,z)^T \to (x+y-z)^T, &\quad \phi_4 :\ (x,y,z)^T \to (x+y,z)^T, \\ \phi_5 :\ (x,y)^T \to (y,y-x,y+x)^T, &\quad \phi_6 :\ (x,y)^T \to (x+y,-y,-x)^T, \end{aligned}$$

4. Ird fel a kovetkezo ket dimenzios geometriai transzformaciok matrixait!
   - Az x-tengelyre valo meroleges vetites matrixa,
   - Az y-tengelyre valo meroleges vetites matrixa,
   - Az $y=x$ egyenesre valo meroleges vetites matrixa,
   - Az $y-x=0$ egyenesre valo meroleges vetites matrixa,
   - Ismeteld meg ezeket a feladatokat ha nem vetitunk, hanem tukrozunk!
5. Ird fel a kovetkezo harom dimenzios geometriai transzformaciok matrixait!
   - Az x-tengelyre valo meroleges vetites matrixa,
   - Az xz-sikra valo meroleges vetites matrixa,
   - Az $y=x$ sikra valo meroleges vetites matrixa,
   - Az $y-x=0$ sikra valo meroleges vetites matrixa,
   - Ismeteld meg ezeket a feladatokat ha nem vetitunk, hanem tukrozunk!

4. Koordinata transzformacio

Legyen

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{f_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} = \alpha\vec{f_1} + \beta\vec{f_2}.$$

1. Ha $x = 3$, $y = 2$, akkor mennyi α, β ? Probalj erre ugy valaszolni, hogy lerajzolod az e es az f koorrdinatarendszer vektorai altal generalt koordinatarendszereket, es az igy kapott abrarol leolvasod α, β erteket!

2. Keresd meg a

   $$\sigma : \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

   lekepezes matrixat!

3. Keresd meg a

   $$\sigma^{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

   lekepezes matrixat