4516

2021.10.19

Zh1, Lin.Alg., ~~2018.10.24~~. NEPTUN: Aláírás:

Név:

$$g:\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) \longrightarrow \begin{bmatrix}y\\2y-x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0x+1y\\-1x+2y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

1. ((2+1+1)+(1+2)+2 pont)

A) Legyen $f:((x,y)^T) \to (y-x,\ 3x-4y,\ x)^T$ és $g:((x,y)^T) \to (y,\ 2y-x)^T$.

a) Ird fel az f és g transzformációk F, G mátrixait!

$$\underbrace{\begin{bmatrix}-1&1\\3&-4\\1&0\end{bmatrix}}_{F}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y-x\\3x-4y\\x\end{bmatrix} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix}0&1\\-1&2\end{bmatrix}}_{G}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y\\2y-x\end{bmatrix}$$

mivel megegyeznek, létezik az $f\circ g$ összetett függvény

$$\mathbb{R}^3 \xleftarrow[F]{f} \mathbb{R}^2 \qquad \mathbb{R}^2 \xleftarrow[G]{g} \mathbb{R}^2$$

$$\underbrace{}_{\substack{f\circ g\\ FG}}$$

létezik az FG mátrix szorzat

b) Abban az esetben, ha létezik, mennyi az $f\circ g$ transzformáció mátrixa?

$$f\circ g \longleftrightarrow FG = \begin{bmatrix}-1&1\\3&-4\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\-1&2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1&1\\4&-5\\0&1\end{bmatrix}$$

c) Abban az esetben, ha létezik, mennyi az $g\circ f$ transzformáció mátrixa?

$$g\circ f \longleftrightarrow GF = \underbrace{\begin{bmatrix}0&1\\-1&2\end{bmatrix}}_{2}\begin{bmatrix}-1&1\\3&-4\\1&0\end{bmatrix}\Big\updownarrow 3$$

$3 \neq 2$: GF nem létezik

$$\mathbb{R}^2 \xleftarrow[G]{g} \mathbb{R}^2 \qquad \mathbb{R}^3 \xleftarrow[F]{f} \mathbb{R}^2$$

2 dim ≠ 3 dim, nincs összetett függvény

B) Legyen

$$A = \begin{pmatrix}-1&4&1\\0&1&2\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}0&2\\1&-3\end{pmatrix}.$$

a) Abban az esetben, ha létezik, mennyi $(AB+(B+2E))$?

$$\begin{bmatrix}-1&4&1\\0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2\\1&-3\end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix}0&2\\1&-3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}\right)$$

nem értelmezett: $\underbrace{\begin{bmatrix}-1&4&1\\0&1&2\end{bmatrix}}_{3}\begin{bmatrix}0&2\\1&-3\end{bmatrix}\Big\updownarrow 2 \qquad 3 \neq 2$

b) Abban az esetben, ha létezik, mennyi $(E+B)A+2A$?

$$\left(\underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&2\\1&-3\end{bmatrix}}\right)\begin{bmatrix}-1&4&1\\0&1&2\end{bmatrix} + \underbrace{2\cdot\begin{bmatrix}-1&4&1\\0&1&2\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}-2&8&2\\0&2&4\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}-3&14&7\\-1&4&1\end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&2\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&4&1\\0&1&2\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}-1&6&5\\-1&2&-3\end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix}-1&6&5\\-1&2&3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2&8&2\\0&2&4\end{bmatrix}$$

C) Legyen $x_0 = 13$, $x_{n+1} = 1.2x_n + 10$. Mennyi x_n ?

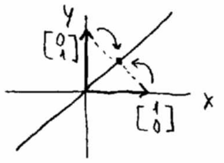
Fixpont: $x_{fix} = 1.2\,x_{fix} + 10 \longrightarrow x_{fix} = -50$

$$x_n = 1{,}2^n\,(13-(-50)) + (-50) = 1.2^n \cdot 63 - 50$$

2. ((1+1+2)+(2+2)+2 pont) Írd fel a következő transzformációk mátrixait, ha az $\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3$ vektortereket ortonormált bázisokban az $(x,y)^T$ es az $(x,y,z)^T$ vektorokkal koordinátázzuk!

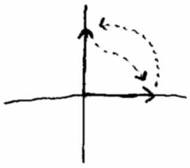
A) $\mathbb{R}^2$-ben:

a) az $x-y=0$ egyenesre való merőleges vetítés,



$$P\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix} \qquad P\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix} \qquad P=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\1/2 & 1/2\end{bmatrix}$$

b) az $x-y=0$ egyenesre való merőleges tükrözés,



$$T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \qquad T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \qquad T=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

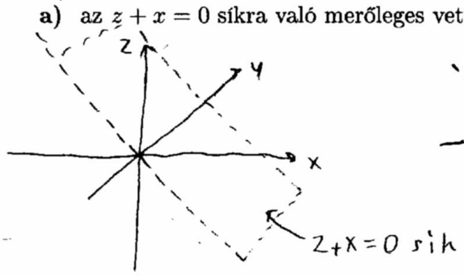
c) az origón átmenő, az $(2,1)^T$ vektorral párhuzamos egyenesre való merőleges vetítés,

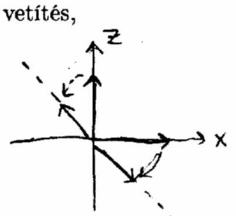
normalizált egységvektor $\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

$$P=\vec{n}\,\vec{n}^T=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}$$

B) $\mathbb{R}^3$-ben:

a) az $z+x=0$ síkra való merőleges vetítés,





$$P\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2\\0\\-1/2\end{bmatrix} \qquad P\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/2\\0\\1/2\end{bmatrix} \qquad P\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$P=\begin{bmatrix}1/2 & 0 & -1/2\\0 & 1 & 0\\-1/2 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$$

P nem befolyásolja az y koordinátát

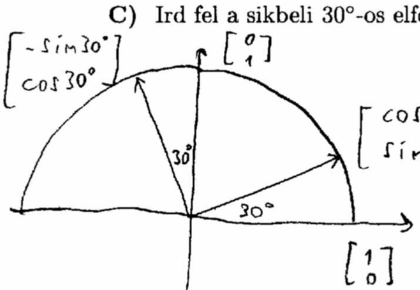
b) az $z=0$ síkra való merőleges tükrözés,

$$T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\-z\end{bmatrix} \qquad T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

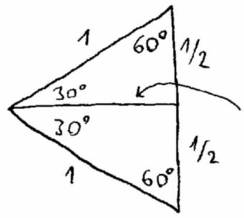
vagy

$$T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \qquad T\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \qquad T\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix} \qquad T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

C) Ird fel a sikbeli 30°-os elforgatas matrixat!



$$R_{30°}=\begin{bmatrix}\cos 30° & -\sin 30°\\ \sin 30° & \cos 30°\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{3}/2 & -1/2\\ 1/2 & \sqrt{3}/2\end{bmatrix}$$



$\frac{\sqrt{3}}{2}$, mivel $1^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$

3. (1+1+2+2+4 pont)
Adott öt pont

$$P = (4,0,0), \quad Q = (0,0,4), \quad R = (0,4,0), \quad S = (1,5,1), \quad T = (2,6,2)$$

az $\mathbb{R}^3$ Euklideszi vektortérben egy ortonormált bázisban.

a) Írd fel a S és T pontokat tartalmazó egyenes parametrikus egyenletét!

$$\vec{v} = T - S = (2,6,2) - (1,5,1) = (1,1,1)$$
$$\vec{r}(t) = S + t\cdot\vec{v} = (1,5,1) + t\cdot(1,1,1) = (1+t,\, 5+t,\, 1+t)$$

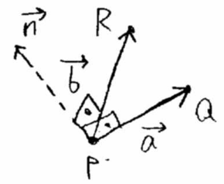
b) Írd fel a S és T pontokat tartalmazó egyenes algebrai egyenleteit!

$$\left.\begin{aligned} 1+t &= x \\ 5+t &= y \\ 1+t &= z \end{aligned}\right\} \Longrightarrow t = x-1 = y-5 = z-1 \Longrightarrow$$

tehát pl.

$$x-1 = y-5, \quad y-5 = z-1 \quad \text{vagy} \quad x-y+0z = -4, \quad 0x+y-z = 4$$

c) Írd fel a a P, Q és R pontokat tartalmazó sík algebrai egyenletét!



$$\vec{PQ} = \vec{a} = (0,0,4) - (4,0,0) = (-4,0,4)$$
$$\vec{PR} = \vec{b} = (0,4,0) - (4,0,0) = (-4,4,0)$$

$(-4)\cdot 4 - 0\cdot(-4)$

$$\vec{n} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 0 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \underbrace{\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}}\vec{k} = -16\vec{i} - 16\vec{j} - 16\vec{k} = (-16,-16,-16)$$

sík egyenlete: $\vec{n}(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$

$$(-16,-16,-16)\left[(x,y,z) - (4,0,0)\right] = -16\cdot(x-4) - 16(y-0) - 16(z-0) = -16x - 16y - 16z + 64 = 0$$

vagy $x+y+z = 4$ ← ha az $\vec{n}' = (1,1,1)$ normálvektort használjuk

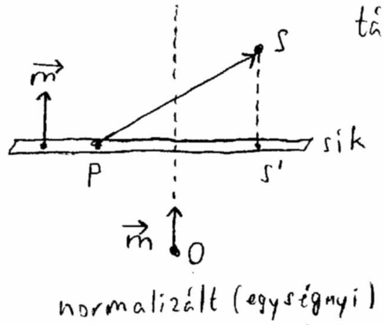
d) Hol van a sík és az egyenes metszéspontja?

$$x + y + z = 4$$
$$(1+t) + (5+t) + (1+t) = 4$$
$$7 + 3t = 4 \longrightarrow t = -1$$

metszéspont $\vec{r}(-1) = (1-1,\, 5-1,\, 1-1) = (0,4,0)$

ez éppen R

e) Mennyi az sík távolsága az S-től?



$$\text{távolság} = d(S,S') = \left|\vec{m}\cdot\overbrace{(S-P)}^{\vec{PS}}\right| =$$
$$= \left|\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\, (-3,5,1)\right)\right| =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1\cdot(-3) + 1\cdot 5 + 1\cdot 1\right) = \sqrt{3}$$

normalizált (egységnyi) normálvektor $\vec{m} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\cdot(1,1,1)$

4. (3+3+4 pont)

A) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}.$$

Adj meg es oldj meg egy olyan egyenletrendszert, aminek az egyértelmű megoldása x, y, u, v !

$$A A^{-1} = E$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & u \\ y & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 0x - 1y = 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow y = -1 \longrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} 0u - 1v = 0 \\ 2u + 3v = 1 \end{array}\right\} \longrightarrow v = 0 \longrightarrow u = \frac{1}{2}$$

$$\longrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

B) Legyen $\bar{a} = (1,2,3)$, $\bar{b} = (2,3,4)$. Mennyi

- az $\bar{a}\bar{b}$ skalaris szorzat,

$$\bar{a}\bar{b} = (1,2,3)\cdot(2,3,4) = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 = 20$$

- az $\bar{a}$ és a $\bar{b}$ vektorok altal bezart szog koszinusza,

$$\cos\alpha = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \frac{20}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2+4^2}} = \frac{20}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{29}} = \frac{20}{\sqrt{406}}$$

- az $\bar{a}$ és a $\bar{b}$ oldalu haromszog terulete?

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= -1\vec{i} + 2\vec{j} - 1\vec{k} = (-1, 2, -1)$$

$$T_\Delta = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

C) Legyen $P = (3,0,0)$, $Q = (0,0,3)$, $R = (0,-3,0)$. Mennyi R tavolsaga a P-t es Q-t tartalmazo egyenestol?

PQ egyenes: $\vec{r}(t) = (3,0,0) + t\underbrace{[(0,0,3)-(3,0,0)]}_{\vec{v} = (-3,0,3)} = (3-3t, 0, 3t)$

$$(\vec{r}(t) - R) \perp \vec{v} \longleftrightarrow (\vec{r}(t)-R)\cdot\vec{v} = 0 = [(3-3t, 0, 3t) - (0,-3,0)]\cdot(-3,0,3)$$

$$= (3-3t)\cdot(-3) + 3\cdot 0 + 3t\cdot 3 = -9 + 18t = 0 \longrightarrow t = 1/2$$

A legközelebbi pont R-hez az egyenesen $\vec{r}(\frac{1}{2}) = (1.5, 0, 1.5)$

Távolság: $d\big((0,-3,0), (1.5,0,1.5)\big) = |(1.5, -3, 1.5)| = 1.5\cdot\sqrt{6} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$