Lin.Alg., 2021.12.14. NEPTUN: Aláírás:

Név:

1. (3+4+3 pont) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Keresd meg A sajatertekeit!

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(4-\lambda) - 0 \cdot 1 = (3-\lambda)(4-\lambda)$$

tehát $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$

Keresd meg A sajatvektorait!

$$(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}, \quad \vec{v} \neq \vec{0}$$

$\lambda_1 = 3$:

$$A - \lambda E = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$1x + 1y = 0 \longrightarrow y = -x$$

sajátvektorok: $\begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix}$, $x \neq 0$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 4$

$$A - \lambda E = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} -x = 0 \\ x = 0 \end{matrix} \longrightarrow x = 0$$

sajátvektorok: $\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$, $y \neq 0$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mennyi $A^{17}(2,6)^T$?

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \alpha_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \alpha_1 = 2 \longrightarrow -2 + \alpha_2 = 6 \longrightarrow \alpha_2 = 8$$

$$= 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 8\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{17}\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = A^{17}\left(2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 8\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2 \cdot A^{17}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 8 \cdot A^{17}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot 3^{17} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 8 \cdot 4^{17} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vagy $A^{17}\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3^{17} & 0 \\ 0 & 4^{17} \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3^{17} & 0 \\ 0 & 4^{17} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^{17} \cdot 2 \\ 4^{17} \cdot 8 \end{bmatrix}$$

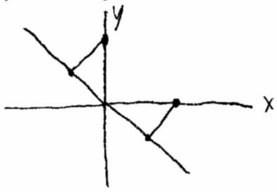
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3^{17} \cdot 2 \\ 4^{17} \cdot 8 \end{bmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 3^{17} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 8 \cdot 4^{17}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. ((1+2+2)+(1+1+1)+2 pont)
Írd fel a következő transzformációk mátrixait, ha az $\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3$ vektortereket ortonormált bázisokban az $(x,y)^T$ es az $(x,y,z)^T$ vektorokkal koordinátázzuk!

A) $\mathbb{R}^3$-ben:

a) az $x+y=0$ síkra való merőleges vetítés,

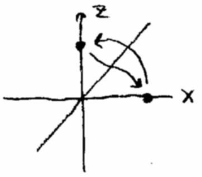


2dim: $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1/2\\-1/2\end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}-1/2\\1/2\end{bmatrix}$

$$P_2 = \begin{bmatrix}1/2 & -1/2\\ -1/2 & 1/2\end{bmatrix}$$

3dim: $$P_3 = \begin{bmatrix}1/2 & -1/2 & 0\\ -1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

b) az $x-z=0$ síkra való merőleges tükrözés,



2dim: $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \begin{matrix}\leftarrow x\\ \leftarrow z\end{matrix}$ $\quad \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

$$T_2 = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

3dim: $$T_3 = \begin{array}{c}\begin{matrix} x & & z\\ \downarrow & & \downarrow\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}\begin{matrix}\leftarrow x\\ \\ \leftarrow z\end{matrix}$$

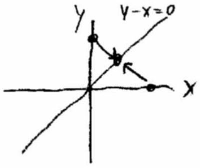
c) az origón átmenő, az $(1,1,2)^T$ vektorral párhuzamos egyenesre való merőleges vetítés,

$$P_{\vec{n}} = \underset{\text{ha } |\vec{n}|=1}{\vec{n}\,\vec{n}^T} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}}_{\text{egységvektor}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

$$\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$$

B) $\mathbb{R}^2$-ben:

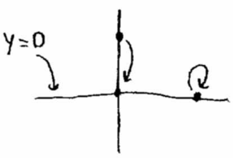
a) az $y-x=0$ egyenesre való merőleges vetítés (jeloljuk az eredmenyul kapott matrixot P_1-gyel),



$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix}$

$$P_1 = \begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix}$$

b) az $y=0$ egyenesre való merőleges vetités (jeloljuk az eredmenyul kapott matrixot P_2-vel),



$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

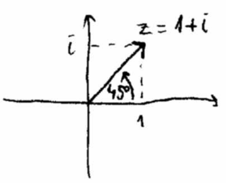
$$P_2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

c) Mennyi $P_1P_2 - P_2P_1$?

$$\begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 1/2 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -1/2\\ 1/2 & 0\end{bmatrix}$$

C) Legyen $z=1+i$. Mennyi z^{17} trigonometrikus es algebrai alakja?



$$1+i = \sqrt{1^2+1^2}\cdot(\cos 45° + i\cdot\sin 45°)$$

$$(1+i)^{17} = \sqrt{2}^{17}\left(\cos(17\cdot 45°) + i\cdot\sin(17\cdot 45°)\right) =$$

$$17\cdot 45° = 2\cdot\overbrace{8\cdot 45°}^{360°} + 45°$$

$$= 2^8\cdot\sqrt{2}\,(\underbrace{\cos 45°}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} + i\cdot\underbrace{\sin 45°}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}) = 2^8\cdot(1+i) = 256+256i$$

3. (1+1+2+2+4 pont)

A) Adott öt pont

$$P = (4,0,0), \quad Q = (0,4,0), \quad R = (0,0,0), \quad S = (6,3,2), \quad T = (5,3,2)$$

az $\mathbb{R}^3$ Euklideszi vektortérben egy ortonormált bázisban.

a) Írd fel a S és T pontokat tartalmazó egyenes parametrikus egyenletét!

$$\vec{v} = \overrightarrow{ST} = T - S = [-1, 0, 0]$$

$$\vec{r}(t) = S + t \cdot \vec{v} = (6,3,2) + t(-1,0,0) = (6-t, 3, 2)$$

b) Írd fel a S és T pontokat tartalmazó egyenes algebrai egyenleteit!

$$x = 6 - t \longrightarrow t = 6 - x$$

$$\left.\begin{aligned} y &= 3 \\ z &= 2 \end{aligned}\right\}$$ ezek az algebrai egyenletek.

(síkok egyenletei: $0x + 1y + 0z = 3$, $0x + 0y + 1z = 2$)

c) Írd fel a a P, Q és R pontokat tartalmazó sík algebrai egyenletét!

két síkbeli vektor: $\vec{a} = \overrightarrow{RP} = P - R = (4,0,0)$

$\vec{b} = \overrightarrow{RQ} = Q - R = (0,4,0)$

a sík normálvektora lehet

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 16\vec{k} = (0,0,16)$$

$$\vec{n}(\vec{r} - \vec{r}_0) = (0,0,16) \cdot (x-0, y-0, z-0) = \boxed{16z = 0}$$ vagy $0x + 0y + z = 0$, $z = 0$.

$R = (0,0,0)$

vagy $(0,0,1)$

ez az xy koordinátasík

d) Hol van a sík és az egyenes metszéspontja?

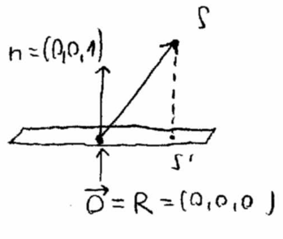
$$0 \cdot \underbrace{(6-t)}_{x} + 0 \cdot \underbrace{3}_{y} + 16 \cdot \underbrace{2}_{z} = 0$$

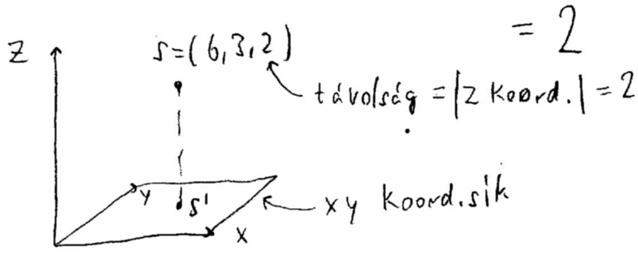
$$16 \cdot 2 = 0$$

ellentmondás,
nincs megoldás,
nincs metszéspont

e) Mennyi az sík távolsága az S-től?

$$|\overrightarrow{SS'}| = \left| \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \cdot \overrightarrow{RS} \right| = \left| \overbrace{\left((0,0,1) \cdot (6,3,2)\right)}^{\text{skaláris szorzat}} \right| = |0 \cdot 6 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2| = 2$$





4. (5+5 pont) A. Oldd meg pivotalassal a kovetkezo egyenletrenszert, tovabba jeloljuk az egyenletrendszer egyutthatomatrixat A-val! (A megoldast $\mathbb{R}^5$-beli vektorokkent add meg!)

$$1x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 3$$
$$2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 10x_5 = 6.$$

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & b \\ \hline e_1 & \boxed{1} & 3 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ e_2 & 2 & 6 & 4 & 4 & 10 & 6 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & b \\ \hline a_1 & 1 & 3 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

partikuláris megoldás, (b oszlop): $\vec{b} = 3\vec{a}_1$ $\quad \vec{x}_{part} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

hom. egy. megoldásai bázisa ($a_{2,3,4,5}$ oszlopok):

$\vec{a}_2 = 3\vec{a}_1 \longrightarrow \vec{0} = 3\vec{a}_1 - 1\cdot\vec{a}_2 + 0\cdot\vec{a}_3 + 0\cdot\vec{a}_4 + 0\cdot\vec{a}_5$

$\vec{a}_3 = 2\vec{a}_1 \longrightarrow \vec{0} = 2\vec{a}_1 + 0\cdot\vec{a}_2 - 1\cdot\vec{a}_3 + 0\cdot\vec{a}_4 + 0\cdot\vec{a}_5$

$\vec{a}_4 = 2\vec{a}_1 \longrightarrow \vec{0} = 2\vec{a}_1 + 0\cdot\vec{a}_2 + 0\vec{a}_3 - 1\cdot\vec{a}_4 + 0\cdot\vec{a}_5$

$\vec{a}_5 = 5\vec{a}_1 \longrightarrow \vec{0} = 5a_1 + 0\vec{a}_2 + 0\vec{a}_3 + 0\vec{a}_4 - 1\cdot\vec{a}_5$

$$\vec{x}_{h_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_{h_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_{h_4} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_{h_5} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_{ált} = \vec{x}_{part} + t_2\vec{x}_{h_2} + t_3\vec{x}_{h_3} + t_4\vec{x}_{h_4} + t_5\vec{x}_{h_5}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_4\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_5\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$= -x_3$

B. Keresd meg az alabbi A matrix LU felbontasat!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 6 & 4 \\ 4 & 14 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 6 & 4 \\ 4 & 14 & 10 \end{matrix} \;\underbrace{\xrightarrow[\substack{II. \to II. - 3\cdot I. \\ III. \to III - 2\cdot I.}]{I. \to I.}}_{\ell_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}\; \begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 12 & 8 \end{matrix} \;\underbrace{\xrightarrow[\substack{II. \to II. \\ III. \to III - 4\cdot II}]{I. \to I.}}_{\ell_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}}\; \begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix}$$

$$\to U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \ell_2 \ell_1 A$$

$$L = \ell_1^{-1}\ell_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$