PotZh1, Lin.Alg., 2021.12.07. NEPTUN: Aláírás:

Név:

1. ((2+1+1)+(1+2)+2 pont)

A) Legyen $f: ((x,y)^T) \to (y,\, 2y-x,\, x-4y,\, x)^T$ és $g: ((x,y)^T) \to (y,\, 2y-x)^T$.

a) Ird fel az f és g transzformációk F, G mátrixait!

$$F=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad G=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

2

b) Abban az esetben, ha létezik, mennyi az $f \circ g$ transzformáció mátrixa?

$$f\circ g \longleftrightarrow FG = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 4 & -7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1

c) Abban az esetben, ha létezik, mennyi az $g \circ f$ transzformáció mátrixa?

$g\circ f \longleftrightarrow GF$ lenne, ha $\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} 4$ létezne, de $2 \neq 4$, G oszlopai száma $\neq$ $\neq$ F sorai száma

1

B) Legyen

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Abban az esetben, ha létezik, mennyi $(B+2E)A+A$?

1

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} + 2\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6 & -2 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -10 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Abban az esetben, ha létezik, mennyi $(E+A)B+2A$?

$$E+A = E + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}}_{}$$

2

3x2-es mátrix, viszont E nxn-es egységmátrix, így E se 2x2-es, se 3x3-as nem lehet, tehát a kifejezés értelmezhetetlen

C) Legyen $x_0 = 13$, $x_{n+1} = 2x_n - 10$. Mennyi x_n ?

Fixpont: $x_{fix} = 2x_{fix} - 10 \longrightarrow x_{fix} = 10$

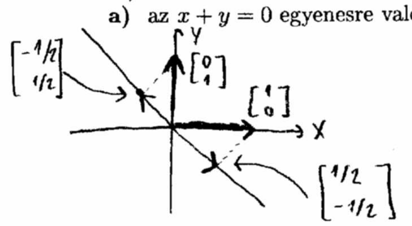
$$x_n = 2^n \cdot (13-10) + 10 = 2^n \cdot 3 + 10$$

2

2. ((1+1+2)+(2+2)+2 pont) Írd fel a következő transzformációk mátrixait, ha az $\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3$ vektortereket ortonormált bázisokban az $(x, y)^T$ es az $(x, y, z)^T$ vektorokkal koordinátázzuk!

A) $\mathbb{R}^2$-ben:

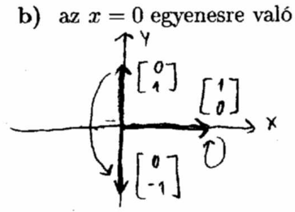
a) az $x + y = 0$ egyenesre való merőleges vetítés,



$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1/2\\-1/2\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}-1/2\\1/2\end{bmatrix}$$

$$P = \left[\boxed{\begin{matrix}1/2\\-1/2\end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix}-1/2\\1/2\end{matrix}}\right]$$

b) az $x = 0$ egyenesre való merőleges tükrözés,



$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$$

c) az origón átmenő, az $(4, 3)^T$ vektorral párhuzamos egyenesre való merőleges vetítés,

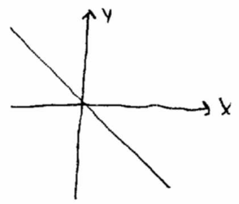
$\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ irányú egységvektor: $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{4^2+3^2}} \cdot \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$

Vetítés mátrixa: $P_{\vec{n}} = \vec{n}\,\vec{n}^T = \frac{1}{\sqrt{4^2+3^2}} \cdot \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{4^2+3^2}} \begin{bmatrix}4 & 3\end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 3\end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix}16 & 1\\12 & 9\end{bmatrix}$

B) $\mathbb{R}^3$-ben:

a) az $y + x = 0$ síkra való merőleges vetítés,

2 dim, z=0 sík:



$$\begin{array}{ccc} & & \\ P_{2dim} = & \begin{bmatrix}1/2 & -1/2\\-1/2 & 1/2\end{bmatrix} & \begin{matrix}\leftarrow x\\ \leftarrow y\end{matrix}\\ & \begin{matrix}\uparrow & \uparrow\\ x & y\end{matrix} & \end{array}$$

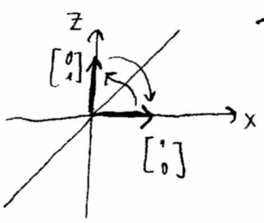
az $y+x=0$ sík tartalmazza a z tengelyt, így a vetítés nem keveri a z és a x,y koordinátákat

$$\begin{array}{ccc} P_{3dim} = & \begin{bmatrix}* & * & 0\\ * & * & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} & \begin{matrix}\leftarrow x\\ \leftarrow y\\ \leftarrow z\end{matrix}\\ & \begin{matrix}\uparrow & \uparrow & \uparrow\\ x & y & z\end{matrix} & \end{array}$$

Tehát $P_{3dim} = \begin{bmatrix}1/2 & -1/2 & 0\\-1/2 & 1/2 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

b) az $z + (-x) = 0$ síkra való merőleges tükrözés,

$z - x = 0$

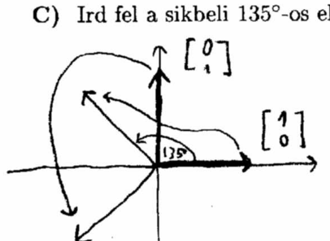


$$\begin{array}{ccc} T_{2dim} = & \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} & \begin{matrix}\leftarrow x\\ \leftarrow z\end{matrix}\\ & \begin{matrix}\uparrow & \uparrow\\ x & z\end{matrix} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} T_{3dim} = & \begin{bmatrix}* & 0 & *\\ 0 & 1 & 0\\ * & 0 & *\end{bmatrix} & \begin{matrix}\leftarrow x\\ \leftarrow y\\ \leftarrow z\end{matrix}\\ & \begin{matrix}\uparrow & \uparrow & \uparrow\\ x & y & z\end{matrix} & \end{array}$$

Tehát $T_{3dim} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

C) Ird fel a sikbeli 135°-os elforgatas matrixat!



$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}\cos 135°\\ \sin 135°\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}-\sin 135°\\ \cos 135°\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$R_{135°} = \begin{bmatrix}-1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\end{bmatrix}.$$

3. (1+1+2+2+4 pont)
Adott öt pont

$$P=(-2,0,0),\quad Q=(0,0,2),\quad R=(0,2,0),\quad S=(1,3,3),\quad T=(2,4,4)$$

az $\mathbb{R}^3$ Euklideszi vektortérben egy ortonormált bázisban.

a) Írd fel a S és T pontokat tartalmazó egyenes parametrikus egyenletét!

$$\vec{v}=T-S=\overrightarrow{ST}=(2,4,4)-(1,3,3)=(1,1,1)$$

$$\vec{r}(t)=S+t\cdot\vec{v}=(1,3,3)+t(1,1,1)=(1+t,\ 3+t,\ 3+t)$$

b) Írd fel a S és T pontokat tartalmazó egyenes algebrai egyenleteit!

$$\left.\begin{array}{l} x=1+t \\ y=3+t \\ z=3+t \end{array}\right\}\ t=x-1=y-3=z-3 \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x-1=y-3 \\ y-3=z-3 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} x-y+0z=-2 \\ 0x+y-z=0 \end{array}$$

c) Írd fel a a P,Q és R pontokat tartalmazó sík algebrai egyenletét!

$$\vec{a}=R-P=\overrightarrow{PR}=(2,2,0)$$
$$\vec{b}=Q-P=\overrightarrow{PQ}=(2,0,2)$$

$$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$
$$=4\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}$$

$$\vec{n}(\vec{r}-P)=0$$

$$(4,-4,-4)\cdot(x+2,\ y-0,\ z-0)=0$$

$$4x-4y-4z+8=0 \longleftrightarrow x-y-z+2=0$$

d) Hol van a sík és az egyenes metszéspontja?

$$(1+t)-(3+t)-(3+t)+2=0$$

$$-5-t+2=0 \longrightarrow t=-3$$

metszéspont: $\vec{r}(-3)=(1,3,3)-3\cdot(1,1,1)=(-2,0,0)$

ami pont P.

e) Mennyi az sík távolsága az S-től?

a sík normalizált normálvektora: $\vec{m}=\frac{1}{|\vec{n}|}\cdot\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)$

$$\text{távolság}=\left|(S-P)\cdot\vec{m}\right|=\left|(3,3,3)\cdot\tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)\right|=\left|\tfrac{1}{\sqrt{3}}(3\cdot1+3\cdot(-1)+3\cdot(-1))\right|$$

vagy bármely más pontja a síknak

$(1,3,3)-(-2,0,0)$

$$=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

4. (3+3+4 pont)

A) Legyen $\bar a = (1,2,3)$, $\bar b = (2,3,4)$, $\bar c = (1,1,t)$.

sajtóhiba

a) Mennyi t, ha az $\bar a, \bar b, \bar b$ vektorok linearisan fuggoek?

Megoldás 1: az $\vec a, \vec b, \vec b$ vektorok mindig lin. függőek, hiszen a harmadik $\vec b = 0\vec a + 1\vec b$

Megoldás 2: Mennyi t, ha az $\vec a, \vec b, \vec c$ vektorok lin. függőek?

$$\vec a, \vec b, \vec c \text{ lin. függő} \iff (\vec a, \vec b, \vec c) = 0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & t \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & t \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (3t-4) - 2 \cdot (2t-4) + 3 \cdot (2-3) = -t+1 \longrightarrow t = 1.$$

(valóban, ekkor $\vec b = \vec a + \vec c$, $(2,3,4) = (1,2,3) + (1,1,1)$)

b) Ha $t = 2$, akkor mekkora terfogatu tetraedert feszit ki ezen harom vektor?

$$(\vec a, \vec b, \vec c) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \underbrace{(3 \cdot 2 - 4 \cdot 1)}_{2} - 2 \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 - 1 \cdot 4)}_{0} + 3 \cdot \underbrace{(2 \cdot 1 - 3 \cdot 1)}_{-1} = -1$$

$$\text{Térfogat}_{\text{tetraéder}} = \frac{|(\vec a, \vec b, \vec c)|}{6} = \frac{1}{6}$$

B) Legyen $\bar a = (1,2,3)$, $\bar b = (2,3,4)$. Mennyi

- az $\bar a \bar b$ skalaris szorzat,

$$(1,2,3) \cdot (2,3,4) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 20$$

- az $\bar a$ és a $\bar b$ vektorok altal bezart szog koszinusza,

$$\cos\alpha = \frac{\vec a \cdot \vec b}{|\vec a| \cdot |\vec b|} = \frac{20}{\sqrt{1^2+2^2+3^2} \cdot \sqrt{2^2+3^2+4^2}} = \frac{20}{\sqrt{14 \cdot 29}} = \frac{20}{\sqrt{406}}$$

- az $\bar a$ és a $\bar b$ oldalu haromszog terulete?

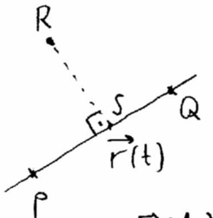
$$\text{Terület}_\Delta = \frac{1}{2} |\vec a \times \vec b| = \frac{1}{2} \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\vec a \times \vec b = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \vec i \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - \vec j \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \vec k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1\vec i + 2\vec j - \vec k = (-1, 2, -1)$$

C) Legyen $P = (3,0,0)$, $Q = (0,0,3)$, $R = (0,-3,0)$. Mennyi R tavolsaga a P-t es Q-t tartalmazo egyenestol?

P, Q egyenese: $\vec v = \vec{PQ} = Q - P = (-3,0,3)$, $\quad \vec r(t) = \vec P + t \cdot \vec v = (3,0,0) + t(-3,0,3) =$

$= (3-3t, 0, 3t)$



$$\vec v = \vec{PQ} \perp (\vec r(t) - R)$$

$$\vec v \cdot (\vec r(t) - R) = 0$$

$$(-3,0,3) \cdot (3-3t, -3, 3t) = 0 = -3(3-3t) + 0 \cdot (-3) + 3 \cdot (3t) =$$

$$= -9 + 18t \longrightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$S = \vec r\left(\tfrac{1}{2}\right) = (1.5, 0, 1.5)$$

$$\text{távolság} = |\vec{RS}| = \sqrt{(0-1.5)^2 + (-3-0)^2 + (0-1.5)^2} = 3 \cdot \frac{\sqrt 3}{\sqrt 2}$$

PotZh2 A, Lin.Alg., 2021.12.07. NEPTUN: Aláírás:

Név:

1. (3+4+3 pont) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Keresd meg A sajatertekeit!

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(4-\lambda) - 0$$

$$\longrightarrow \lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 4$$

Keresd meg A sajatvektorait!

$$(A - \lambda E)\vec{v} = \lambda \vec{v}$$

$\lambda_1 = 5$:

$$\cancel{\begin{pmatrix} 5-5 & 2 \\ 0 & 4-5 \end{pmatrix}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 2y = 0 \\ -1y = 0 \end{matrix} \longrightarrow y = 0$$

sajátvektorok: $\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$, $x \neq 0$

$$\vec{V_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 4$:

$$\begin{bmatrix} 5-4 & 2 \\ 0 & 4-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$1x + 2y = 0 \longrightarrow x = -2y$$

sajátvektorok: $\begin{bmatrix} -2y \\ y \end{bmatrix}$, $y \neq 0$

$$\vec{V_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mennyi $A^{14}(8,4)^T$?

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} \alpha_1 - 2\alpha_2 = 8 \\ \alpha_2 = 4 \end{matrix} \longrightarrow \alpha_1 = 16$$

$$= 16 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{14} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = A^{14} \left(16 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 16 \cdot A^{14} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \cdot A^{14} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 16 \cdot 5^{14} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \cdot 4^{14} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vagy: $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$A^{14} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5^{14} & 0 \\ 0 & 4^{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

2. (7+3 pont) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Szamold ki pivotalassal A inverzet! Ellenorizd az eredmenyed!

	a_1	a_2	a_3	e_1	e_2	e_3
e_1	5	3	0	1	0	0
e_2	0	$\boxed{1}$	2	0	1	0
e_3	−1	0	1	0	0	1
e_1	5	0	−6	1	−3	0
a_2	0	1	2	0	1	0
e_3	−1	0	$\boxed{1}$	0	0	1
e_1	$\boxed{-1}$	0	0	1	−3	6
a_2	2	1	0	0	1	−2
a_3	−1	0	1	0	0	1
a_1	1	0	0	−1	3	−6
a_2	0	1	0	2	−5	10
a_3	0	0	1	−1	3	5

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 2 & -5 & 10 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{0^+ \quad 1^- \quad 0^+ \quad 0^-} \\ 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mennyi $(A^{-1})_{42}$, ha az indexálás 1-nel kezdodik?

$$\det A = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \left(1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{1} - 0 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}}_{5} + 3 \underbrace{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}}_{-6} \right) = 17$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \\ & & & \text{"24"} \\ 0 & 1 & 0 & \\ 6 & 0 & 0 & \end{bmatrix} \longrightarrow (A^{-1})_{42} = \frac{1}{17} \cdot (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{17} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

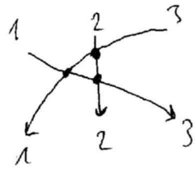
3. (5+5 pont) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Szamold ki pivotalassal det(A)-t!

$$\begin{array}{c|ccc|} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline e_1 & 4 & 2 & 5 \\ e_2 & 2 & 3 & 5 \\ e_3 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ \hline e_1 & 0 & -6 & -7 \\ e_2 & 0 & \boxed{-1} & -1 \\ a_1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & \boxed{-1} \\ a_2 & 0 & 1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline a_3 & 0 & 0 & 1 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\det A = \boxed{1} \cdot \boxed{-1} \cdot \boxed{-1} \cdot \operatorname{sgn} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}^{\text{páratlan permutáció}} = 1 \cdot (-1)(-1) \cdot (-1) = -1$$



3 (páratlan) kereszteződés

Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & -4/5 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mennyi ezen matrixok inverze?

ortogonális mátrix,

$A^{-1} = A^T$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3/5 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.A (5+(2+3) pont) Oldd meg pivotálással a kovetkezo egyenletrenszert! Adj meg egy partikularis megoldast! Adj meg egy bazisát a homogen egyenlet megoldasainak! Ird fel az altalanos megoldast!

$$6x_1 + 0x_2 - 4x_3 = -6$$
$$3x_1 + 1x_2 - 2x_3 = -1$$
$$3x_1 - 1x_2 - 2x_3 = -5.$$

	a_1	a_2	a_3	b
e_1	6	0	-4	-6
e_2	3	$\boxed{1}$	-2	-1
e_3	3	-1	-2	-5
e_1	6	0	-4	-6
a_2	3	1	-2	-1
e_3	$\boxed{6}$	0	-4	-6
e_1	0	0	0	0
a_2	0	1	0	2
a_1	1	0	-2/3	-1

part.: $\vec{b} = 2\cdot\vec{a}_2 + (-1)\vec{a}_1 = -1\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + 0\vec{a}_3$

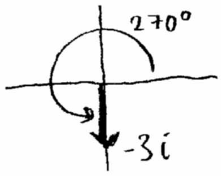
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{part} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

hom: $\vec{a}_3 = -\frac{2}{3}\vec{a}_1 \longrightarrow -\frac{2}{3}\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 - 1\cdot\vec{a}_3 = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{hom} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ált: } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{ált} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2/3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - x_3\begin{bmatrix} -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4.B.1 Legyen $z = -3i$. Sorold fel $\sqrt[3]{z}$ trigonometrikus alakjait!



$$z = 3\cdot(\cos 270^\circ + i\cdot\sin 270^\circ)$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{3}\cdot\left(\cos\left[\frac{270^\circ}{3} + k\frac{360^\circ}{3}\right] + i\cdot\sin\left[\frac{270^\circ}{3} + k\frac{360^\circ}{3}\right]\right), \quad k = 0,1,2$$

$$W_0 = \sqrt[3]{3}\,(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ) = \sqrt[3]{3}\cdot i$$
$$W_1 = \sqrt[3]{3}\,(\cos 210^\circ + i\sin 210^\circ)$$
$$W_2 = \sqrt[3]{3}\,(\cos 330^\circ + i\sin 330^\circ)$$

4.B.2 Legyen

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K}(a,b) = aE + bI.$$

Ha $\mathcal{K}(2,3)\,(\mathcal{K}(1,2))^{-1} = \mathcal{K}(a,b)$, akkor mennyi a és b ?

$$[K(1,2)]^{-1} = \left[1\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1^2 - 2^2 = -3, \quad \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix} \xrightarrow[\text{aldet}]{\text{kieg.}} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{\text{transz.}} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{\pm 1} \begin{matrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{matrix} \longrightarrow \text{inv} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$K(2,3)\,[K(1,2)]^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 & 1/3 \\ 1/3 & 4/3 \end{bmatrix} \longrightarrow a = \frac{4}{3},\ b = \frac{1}{3}$$