Mintafeladatok, Lin.Alg.Gyak. ZH.

1. Legyen $a = i + 2j + 3k$, $b = 2i + k$, $c = 3i + j + 5k$.

Mennyi ab, $a \times b$, abc ?
Mennyi az a, b vektorok kozoti szog koszinusza?
Mennyi az a, b vektorok altal kifeszitett paraleogramma terulete?
Mennyi az a, b vektorok altal kifeszitett haromszog terulete?
Mennyi az a, b, c vektorok altal kifeszitett ferde teglatest terfogata?
Mennyi az a, b, c vektorok altal kifeszitett tetraeder terfogata?

Megoldas:

$$5, \quad (2, 5, -4), \quad -9, \quad \sqrt{\frac{5}{14}}, \quad 3\sqrt{5}, \quad \frac{3\sqrt{5}}{2}, \quad 9, \quad \frac{3}{2}$$

$$ab = (1,2,3)\cdot(2,0,1) = 1\cdot 2 + 2\cdot 0 + 3\cdot 1 = 5$$

$2\cdot 1 - 3\cdot 0$ $\qquad$ $1\cdot 0 - 2\cdot 2$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2i + 5j - 4k$$

$$abc = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1) - 2\cdot 7 + 3\cdot 2 = -9$$

$0\cdot 5 - 1\cdot 1$ $\qquad$ $2\cdot 5 - 1\cdot 3$

$$\cos_{a,b} = \frac{ab}{|a||b|} = \frac{5}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\cdot\sqrt{2^2+0^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{14\cdot 5}} = \sqrt{\frac{5}{14}}$$

$$T_{\square} = |a \times b| = |2i + 5j + 4k| = |(2,5,4)| = \sqrt{2^2+5^2+4^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$T_{\triangle} = \frac{T_{\square}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$T_{\boxdot} = |abc| = |-9| = 9$$

$$T_{\blacktriangle} = \frac{T_{\boxdot}}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

Ha $\cos = 0, \; 1, \; \frac{1}{2}, \; \frac{\sqrt{3}}{2}, \; -1, \; -\frac{1}{2}, \; -\frac{\sqrt{3}}{2}$

akkor $\alpha = 90°, \; 0°, \; 60°, \; 30°, \; 180°, \; 120°, \; 150°$

vagy $\frac{\pi}{2}, \; 0, \; \frac{\pi}{3}, \; \frac{\pi}{6}, \; \pi, \; \frac{\pi}{3}, \; \frac{5\pi}{6}$

24. a) Oldd meg a kovetkezo linearis egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 0x_3 &= 11 \\ 0x_1 + 1x_2 + 2x_3 &= 8 \\ -1x_1 + 0x_2 + 1x_3 &= 2 \end{aligned} \quad , \qquad \text{vagyis} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Legyen $a_1 = 5i - k$, $a_2 = 3i + j$, $a_3 = 2j + k$, $b = 11i + 8j + 2k$. Fejezd ki b-t az a-k linearis kombinaciojakent!
Megoldas: (a p index a pivotelem poziciojat jeloli)

$$\left(\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ e_1 & 5 & 3 & 0 & 11 \\ e_2 & 0 & 1_p & 2 & 8 \\ e_3 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ e_1 & 5 & 0 & -6 & -13 \\ a_2 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ e_3 & -1 & 0 & 1_p & 2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ e_1 & -1_p & 0 & 0 & -1 \\ a_2 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ a_3 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Vagyis $b = 1a_1 + 2a_2 + 3a_3$, illetve $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline e_1 & 5 & 3 & 0 & 11 \\ e_2 & 0 & \boxed{1} & 2 & 8 \\ e_3 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline e_1 & & 0 & & \\ a_2 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ e_3 & & 0 & & \end{array} \longrightarrow$$

$$\frac{8}{\boxed{1}}$$

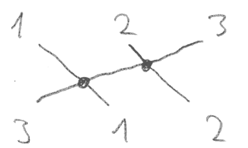
$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline e_1 & & 0 & & -13 \\ a_2 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ e_3 & -1 & 0 & & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline e_1 & 5 & 0 & -6 & -13 \\ a_2 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ e_3 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

$$\frac{\boxed{1}\cdot(-1) - 0\cdot 0}{\boxed{1}} \qquad \frac{\boxed{1}\cdot 11 - 3\cdot 8}{\boxed{1}}$$

a következő lépésben a felő a_2 címkéhez tartozó oszlop automatikusan változatlan marad.

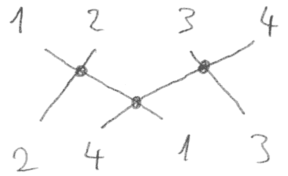
Permutációk paritása:

$\pi = (1,2,3) \to (3,1,2)$ vagy $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$:



2 metszéspont, páros

$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$:



3 metszéspont, páratlan

(ezeken az ábrákon egyszerre csak két vonal metszheti egymást!)

27. Oldd meg az

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (4)$$

alulhatarozott egyenlet(rendszert)!
Megoldas:
Egy partikularis megoldas, illetve a homogen $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ egyenlet ket megoldasa:

$$\text{part:} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{hom:} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Az altalanos megoldas: part.megold+(lin.komb. hom.megold.)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline e_1 & \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline a_1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

Vagyis $\bar{b} = 4\bar{a}_1$, $\bar{a}_2 = 2\bar{a}_1$, $\bar{a}_3 = 3\bar{a}_1$,

$$\bar{0} = 2\bar{a}_1 - \bar{a}_2 - 0\bar{a}_3, \quad \bar{0} = 3\bar{a}_1 - 0\bar{a}_2 - 1\cdot\bar{a}_3$$

Tehát

$$\bar{b} = \bar{b} + t_2\bar{0} + t_3\bar{0} = 4\bar{a}_1 + t_2(2\bar{a}_1 - \bar{a}_2 - 0\bar{a}_3) + t_3(3\bar{a}_1 - 0\bar{a}_2 - 1\cdot\bar{a}_3)$$
$$= (4 + 2t_2 + 3t_3)\bar{a}_1 + (-t_2)\bar{a}_2 + (-t_3)\bar{a}_3.$$

Vagyis az általános megoldás:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 2t_2 + 3t_3 \\ -t_2 \\ -t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ez leolvasható az utolsó pivottáblából:

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline a_1 & 1 & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \end{array}$$

$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ megoldás

Ellenőrzés: $1\cdot4 + 2\cdot0 + 3\cdot0 = 4$

$$\left.\begin{array}{l} 1\cdot2 + 2\cdot(-1) \cdot 3\cdot0 = 0 \\ 1\cdot3 + 2\cdot0 + 3\cdot(-1) = 0 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a homogén egyenled ($\bar{0}$ jobboldal) megoldásai