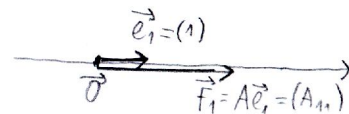


Determináns

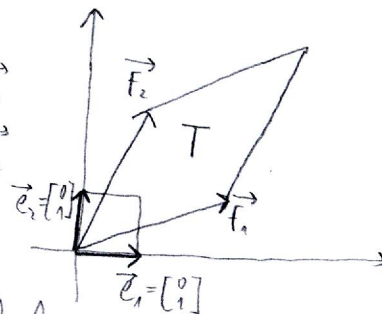
Legyen A egy $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés mátrixa, $A\vec{e}_i = \vec{f}_i$. Mekkora az $\vec{f}_i$ vektorok által kifeszített (1dim: szakasz, 2dim: paralelogramma, 3dim: ferde téglalest (paralelepipedon), ... n dim: ferde hiperkocka) előjeles (1dim: hossza, 2dim: területe, 3dim: térfogata ... n dim: térfogata)? Jelöljük ezt $\det A = |A| = \det(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ -vel.

1 dim: $A = (A_{11}), \vec{e}_1 = (1) \rightarrow A\vec{e}_1 = (A_{11})(1) = (A_{11})$

$$\det(A) = |A_{11}| = \det(\vec{f}_1) = A_{11}$$



2 dim: $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow A\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} = \vec{f}_1$
 $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow A\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} = \vec{f}_2$



$$T = \det(A) = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \det(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$$

3 dim: $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{f_1} & \frac{1}{f_2} & \frac{1}{f_3} \\ \frac{1}{f_1} & \frac{1}{f_2} & \frac{1}{f_3} \\ \frac{1}{f_1} & \frac{1}{f_2} & \frac{1}{f_3} \end{bmatrix}, A\vec{e}_i = \vec{f}_i$

$$\det(A) = |A| = (\vec{f}_1 \times \vec{f}_2) \cdot \vec{f}_3 = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3) = \det(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$$

vegyes szorzat

$A \det: \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés tulajdonságai:

$$\det(E) = \det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) = 1 \quad \text{normalizálás}$$

$$\det(\dots, \vec{f}_{i-1}, \alpha \vec{f}_i + \beta \vec{g}_i, \vec{f}_{i+1}, \dots) = \alpha \det(\dots, \vec{f}_{i-1}, \vec{f}_i, \vec{f}_{i+1}, \dots) + \beta \det(\dots, \vec{f}_{i-1}, \vec{g}_i, \vec{f}_{i+1}, \dots)$$

(multilinearitás)

$$\det(\dots, \vec{f}_{i-1}, \vec{f}_i, \vec{f}_{i+1}, \vec{f}_{i+2}, \dots) = -\det(\dots, \vec{f}_{i-1}, \vec{f}_{i+1}, \vec{f}_i, \vec{f}_{i+2}, \dots)$$

csere
antiszimmetria

Ezek alapján $\det$ kiszámolható. 2 dim. illusztráció:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \det(2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2, 4\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2) =$$

multilinearitás

$$= 2 \cdot 4 \det(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + 2 \cdot 5 \det(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + 3 \cdot 4 \det(\vec{e}_2, \vec{e}_1) + 3 \cdot 5 \det(\vec{e}_2, \vec{e}_2)$$

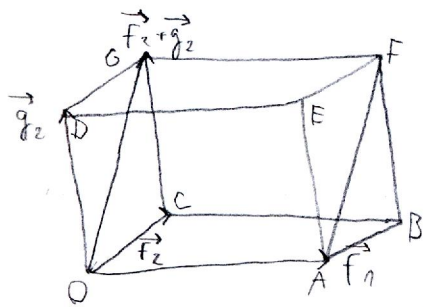
$$\det(\vec{e}_i, \vec{e}_i) = -\det(\vec{e}_i, \vec{e}_i) \Rightarrow \det(\vec{e}_i, \vec{e}_i) = 0 \quad (\text{antiszimmetria}) \quad i=1,2$$

$$\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1 \quad (\text{normalizáció}), \quad \det(\vec{e}_2, \vec{e}_1) = -\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = -1$$

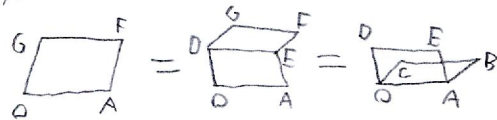
$$\text{tehát } \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 0 + 2 \cdot 5 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 \cdot 0 = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4$$

Multilinearitás: (2dim)

$$\det(\vec{f}_1, \vec{f}_2 + \vec{g}_2) = \det(\vec{f}_1, \vec{f}_2) + \det(\vec{f}_1, \vec{g}_2)$$



$$\begin{aligned} \det(\vec{f}_1, \vec{f}_2 + \vec{g}_2) &= \text{Terület}(\text{OAFG}) = \\ &= \text{Terület}(\text{OAED}) + \text{Terület}(\text{DEFG}) = \\ &= \text{Terület}(\text{OAED}) + \text{Terület}(\text{OABC}) = \\ &= \det(\vec{f}_1, \vec{g}_2) + \det(\vec{f}_1, \vec{f}_2) \end{aligned}$$



Permutáció: bijektív függvény, $\{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$

Matrixreprezentáció:

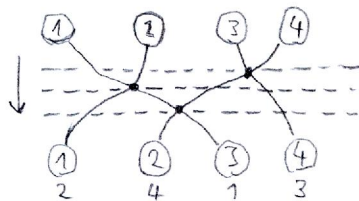
pl. $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\pi(1)=3$, $\pi(2)=1$, $\pi(3)=4$, $\pi(4)=2$

$$\pi \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = S_\pi \quad S_\pi \vec{e}_1 = \vec{e}_3, S_\pi \vec{e}_2 = \vec{e}_1, S_\pi \vec{e}_3 = \vec{e}_4, S_\pi \vec{e}_4 = \vec{e}_2$$

$(\begin{smallmatrix} \vdots & \vdots & 3 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 4 & \vdots \end{smallmatrix}) \rightarrow (S_\pi)_{43} = (S_\pi)_{4 \leftarrow 3} = 1$

π páros/páratlan: Ha páros/páratlan számú elemcserével hozható létre

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{aligned}$$

3 csere,
páratlan permutáció

π páros/páratlan $\Leftrightarrow S_\pi \vec{e}_1 = \vec{e}_{\pi(1)}, S_\pi \vec{e}_2 = \vec{e}_{\pi(2)}, \dots, S_\pi \vec{e}_n = \vec{e}_{\pi(n)}$ pozitív/negatív orientációjú.

$$\det(A) = \sum_{\pi \in \text{permutációk}} A_{\pi(1),1} \cdot A_{\pi(2),2} \cdot \dots \cdot A_{\pi(n),n} \cdot \text{sgn}(\pi)$$

$$= \sum_{\pi \in \text{perm.}} A_{1,\pi(1)} \cdot A_{2,\pi(2)} \cdot \dots \cdot A_{n,\pi(n)} \cdot \text{sgn}(\pi)$$

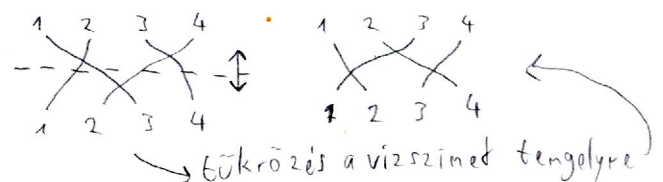
$$\text{sgn}(\pi) = \begin{cases} +1, & \pi \text{ páros} \\ -1, & \pi \text{ páratlan} \end{cases}$$

Itt felhasználtuk az utolsó egyenlőségét, hogy $\det(A) = \det(A^T)$.

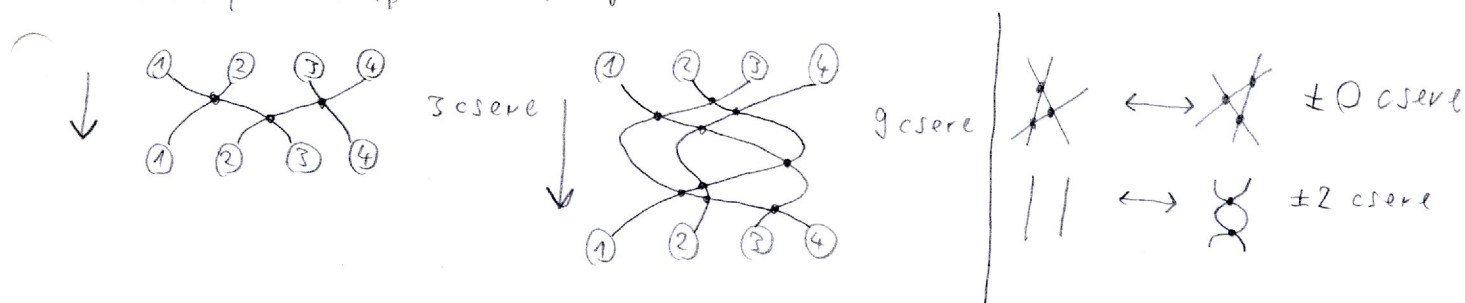
$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \pi^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{sgn}(\pi) = \text{sgn}(\pi^{-1})$$

$$J_\pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, S_{\pi^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_\pi^T$$



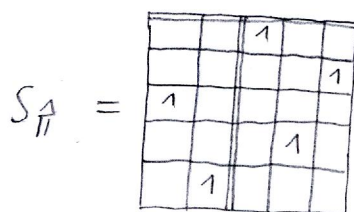
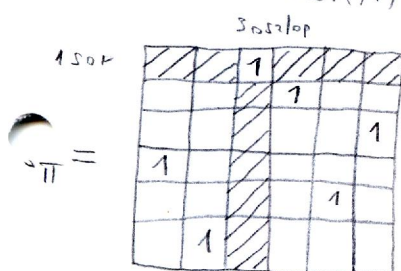
$\text{sgn}(\pi)$ független attól, hogy milyen módon állítjuk elő transpozícióink (párcserék) segítségével π -t:



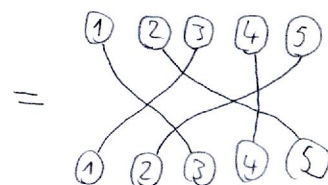
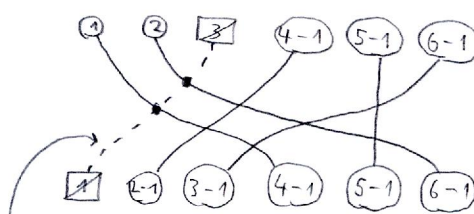
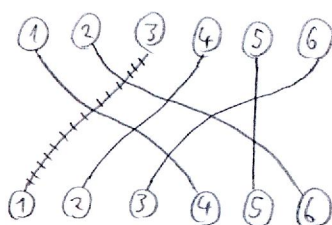
kofaktor kifejtés:

Legyen $\hat{A}_{ij}$ az a mátrix, amit A -ból az i -edik sor és a j -edik oszlop kitérésével kapunk. Ekkor

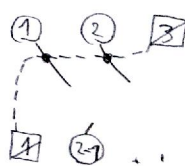
$$\det(A) = \sum_{i=1}^n A_{1i} \det(\hat{A}_{1i}) (-1)^{1+i} = \sum_{i=1}^n A_{2i} \det(\hat{A}_{2i}) (-1)^{2+i}$$



$$\begin{aligned} \text{sgn}(\pi) &= \text{sgn}(\hat{\pi}) \cdot (-1)^{3+1} \\ &= \text{sgn}(\hat{\pi}) \cdot (-1)^{3-1} \end{aligned}$$



az $\hat{A}_{13}$ kofaktorból hiányzó 1,3 elem



2 csere
= 3-1 csere

$$\text{sgn}(\pi) = \text{sgn}(\hat{\pi}) \cdot (-1)^{+2}$$

Példák:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot 4 + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot 3 = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7)$$

Determináns tulajdonságai:

45

① $\det A = \det A^T$, így ha egy tulajdonság teljesül A oszlopaire, akkor ugyanaz igaz a sorokra is.

② $\det(\dots \vec{f}_i \dots \vec{f}_j \dots) = -\det(\dots \vec{f}_j \dots \vec{f}_i \dots)$, $\det(\dots \vec{f} \dots \vec{f} \dots) = 0$

③ $\det(\dots \vec{f}_i \dots \vec{f}_j + \alpha \vec{f}_i \dots) = \det(\dots \vec{f}_i \dots \vec{f}_j \dots)$

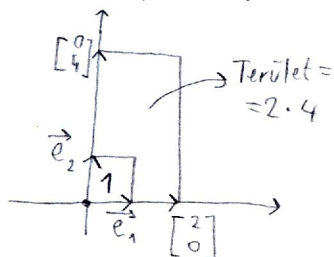
④ $\det(E) = 1$

⑤ $\det(A) \cdot \det(B) = \det(AB)$

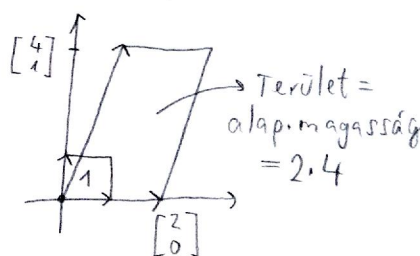
Könnyen kiszámolható determinánssok:

1 dim: $|7| = 7$

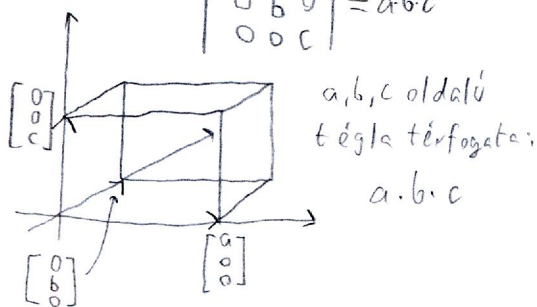
2 dim: $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4$



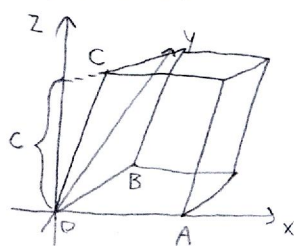
$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4$



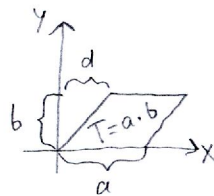
3 dim: $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$



$\begin{vmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$



Az $A = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} d \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$ pontok az xy síkon egy $a \cdot b$ területű paralelogrammát adnak;



4 dim: $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

Az $\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} d \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} e \\ f \\ c \end{bmatrix}$ vektorok által kifeszített ferde téglalest magassága c , alapterülete pedig $a \cdot b$, így térfogata $a \cdot b \cdot c$

$$\varphi(\vec{e}_1) = F\vec{e}_1 = \vec{f}_1 \dots \varphi(\vec{e}_n) = F\vec{e}_n = \vec{f}_n. \quad (\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n) \text{ bázis.}$$

$$\varphi \text{ invertálható} \Leftrightarrow \vec{f}_1 \dots \vec{f}_n \text{ lineárisan független} \Leftrightarrow \det F = \det(\vec{f}_1 \dots \vec{f}_n) \neq 0$$

$$\varphi(\varphi^{-1}(\vec{v})) = \varphi^{-1}(\varphi(\vec{v})) = \vec{v} \Leftrightarrow FF^{-1}\vec{v} = F^{-1}F\vec{v} = \vec{v} \Leftrightarrow FF^{-1} = F^{-1}F = E$$

Kiszámítás:

$$1 \text{ dim:} \quad (7) \cdot (7)^{-1} = (7) \cdot (x) = (1) \Rightarrow 7x = 1, \quad (7)^{-1} = (1/7)$$

① 2dim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1x + 3y &= 1 \\ 2x + 5y &= 0 \\ \hline x &= -5, y = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1u + 3v &= 0 \\ 2u + 5v &= 0 \\ \hline u &= 3, v = -1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

② $\hat{A}_{ij}$: az i -sor és a j -oszlop kitörölése után kapott mátrix

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

klasszikus adjungált:

$$A^{adj} = \begin{pmatrix} | \hat{A}_{11} | & - | \hat{A}_{21} | \\ - | \hat{A}_{12} | & | \hat{A}_{22} | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | 5 | & - | 3 | \\ - | 2 | & | 1 | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A A^{adj} = \det(A) \cdot E$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot | 5 | - 3 \cdot | 2 | & -(1 \cdot | 3 | - 3 \cdot | 1 |) \\ -(2 \cdot | 5 | - 5 \cdot | 2 |) & 2 \cdot | 3 | + 5 \cdot | 1 | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \overset{= \det A}{1 \ 3} | & - | \overset{= 0}{1 \ 3} | \\ | \overset{= 0}{2 \ 5} | & | \overset{= \det A}{2 \ 5} | \end{pmatrix}$$

$$\text{Tehát } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^{adj}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 5 - 2 \cdot 3} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ +2 & -1 \end{pmatrix}$$

3dim:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{adj} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^{adj} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 2 \end{bmatrix} \cdot A^{adj} = \det(A) \cdot E$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} & -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} & * \\ 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 2 \end{vmatrix} = \det A$
 $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 0$
 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 0$ két azonos sor

tehát

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{adj}$$

$$n\text{-dim: } \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |\hat{A}_{11}| & \dots & \dots \\ -|\hat{A}_{12}| & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1} |\hat{A}_{1n}| & \dots & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}|\hat{A}_{11}| - A_{12}|\hat{A}_{12}| + \dots + (-1)^{1+n} A_{1n}|\hat{A}_{1n}| & \dots & \dots \\ A_{21}|\hat{A}_{11}| - A_{22}|\hat{A}_{12}| + \dots + (-1)^{1+n} A_{2n}|\hat{A}_{1n}| & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$$

$\det(A)$ (pointing to the first row of the result matrix)
 0 (pointing to the second row of the result matrix)

$$A_{11}|\hat{A}_{11}| - A_{12}|\hat{A}_{12}| + \dots + (-1)^{1+n} A_{1n}|\hat{A}_{1n}| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} = \det A$$

$$A_{21}|\hat{A}_{11}| - A_{22}|\hat{A}_{12}| + \dots + (-1)^{1+n} A_{2n}|\hat{A}_{1n}| = \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} = 0$$

két azonos sor

① lineáris funkcionálok, duális vektortér

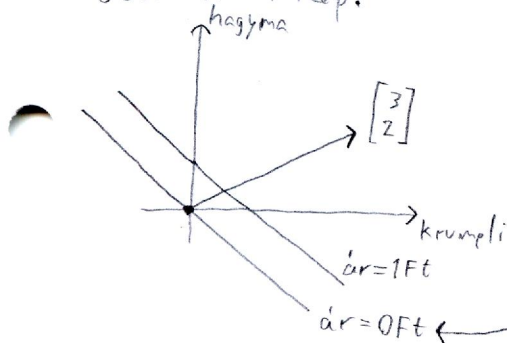
legyen $V = \mathbb{R}^n$. $\ell: V \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris leképezés, $\ell(\vec{e}_i) = \ell_i$. ℓ betű E betű

$$\text{Ekkor } \ell(\vec{v}) = \ell\left(\sum_i v_i \vec{e}_i\right) = \sum_i v_i \ell(\vec{e}_i) = \sum_i \ell_i v_i = (\ell_1, \dots, \ell_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

a $V = \mathbb{R}^n$ oszlopvektorok duális V^* tere: a $V \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris funkcionálok tere.ez maga is egy vektortér: $(m+n)(\vec{v}) = m(\vec{v}) + n(\vec{v})$, $(\lambda m)(\vec{v}) = \lambda m(\vec{v})$, $m, n \in V^*$.Ha V Euklédesszi, akkor a skalárszorzat segítségével V^* azonosítható V -vel:

$$\ell(\vec{v}) = (\ell_1, \dots, \ell_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right) = (\vec{\ell}, \vec{v})$$

Geometrisai kép:



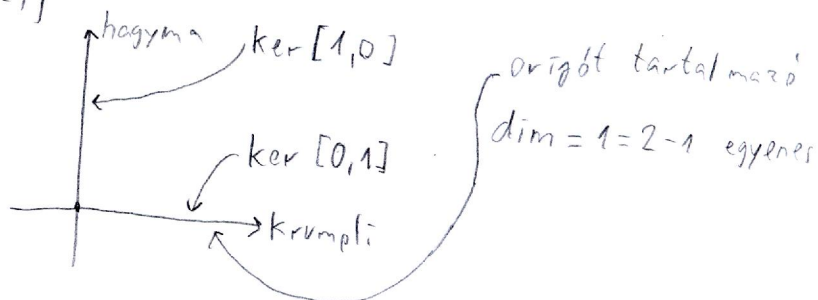
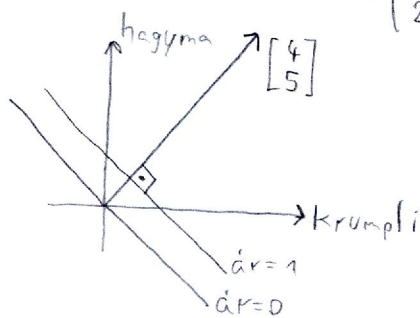
Vegyünk a piacon 3 kg krumplit és 2 kg hagymát, 4 Ft/kg és 5 Ft/kg áron. Mennyit fizetünk?

$$\text{ár} = \underbrace{(4 \text{ Ft/kg}, 5 \text{ Ft/kg})}_P \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \text{ kg} \\ 2 \text{ kg} \end{pmatrix}}_{\vec{v}} = (4 \cdot 3 + 5 \cdot 2) \text{ Ft} = p(\vec{v})$$

$$\ker p = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mid p(\vec{v}) = 0 = (p_1, p_2) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = p_1 v_1 + p_2 v_2 \right\}$$

Ha van skalárszorzat, akkor p azonosítható a $\vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ vektormal:

$$(4, 5) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2$$



$$3 \text{ dim: } (n_1, n_2, n_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 = n(\vec{r}) = n_1 x + n_2 y + n_3 z \leftarrow \begin{matrix} \text{origót tartalmazó} \\ 2 = 3 - 1 \text{ dim sík} \end{matrix}$$

$$\text{Ha van skalárszorzat, akkor } n \text{ azonosítható } \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \text{-mal: } n(\vec{r}) = \left(\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right)$$

 $\infty \text{ dim:}$ lehetséges, hogy $V^* \neq V$. $V = \{(a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)\}$, vagyis csak véges sok nem nulla elem van a a_n sorozatban $V^* = \{(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots)\}$, a_n tetszőleges sorozat.Megjegyzés: $\ker p = \{\vec{v} \mid p(\vec{v}) = 0\}$ a $p: V \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés magja (mag: németül kernel)

② mátrix, bilineáris leképezés

49

Legyen $V = \mathbb{R}^n$ Euklédesszi vektortér, A egy mátrix

$$(\vec{e}_i, A\vec{e}_j) = A_{ij}. \quad \text{pl.} \quad \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \right) = 6 = A_{23} = (\vec{e}_2, A\vec{e}_3)$$

$$(\vec{u}, A\vec{v}) = \vec{u}^T A \vec{v} = (A^T \vec{u})^T \vec{v} = (A^T \vec{u}, \vec{v}) = (A^* \vec{u}, \vec{v}),$$

ahol $A^* = A^T$ az A mátrix (valós) adjungáltja.

$$\text{pl.} \quad \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 \\ 6 & 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

③ (anti)szimmetria

Feladat: Legyen φ egy szimmetrikus bilineáris leképezés.

továbbá legyen $\varphi(\vec{v}_1, \vec{v}_1) = 2$, $\varphi(\vec{v}_2, \vec{v}_2) = 3$, $\varphi(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 4$.

Mennyi $\varphi(5\vec{v}_1 + 6\vec{v}_2, 7\vec{v}_1 + 8\vec{v}_2)$?

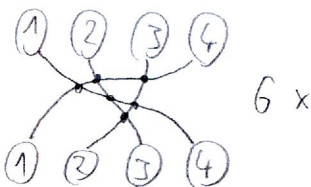
$$\begin{aligned} \varphi(5\vec{v}_1 + 6\vec{v}_2, 7\vec{v}_1 + 8\vec{v}_2) &= 5 \cdot 7 \varphi(\vec{v}_1, \vec{v}_1) + 5 \cdot 8 \varphi(\vec{v}_1, \vec{v}_2) + 6 \cdot 7 \varphi(\vec{v}_2, \vec{v}_1) + 6 \cdot 8 \varphi(\vec{v}_2, \vec{v}_2) \\ &= 5 \cdot 7 \cdot 2 + 5 \cdot 8 \cdot 4 + 6 \cdot 7 \cdot 4 + 6 \cdot 8 \cdot 3 \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{mivel } \varphi(\vec{v}_2, \vec{v}_1) = \varphi(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \end{aligned}$$

Feladat: Legyen φ egy antiszimmetrikus multilineáris leképezés

(vagyis két változója felcserélésakor váltson előjelet),

továbbá legyen $\varphi(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4) = 9$. Mennyi $\varphi(2\vec{v}_1 + \vec{v}_4, \vec{v}_3, 3\vec{v}_2 + 2\vec{v}_1, \vec{v}_1)$?

$$\begin{aligned} \varphi(2\vec{v}_1 + \vec{v}_4, \vec{v}_3, 3\vec{v}_2 + 2\vec{v}_1, \vec{v}_1) &= 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \varphi(\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1) + \\ &+ 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \varphi(\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_1) + \\ &+ 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \varphi(\vec{v}_4, \vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1) \leftarrow = 9 \cdot (-1)^6 \\ &+ 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \varphi(\vec{v}_4, \vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_1) = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 9 \cdot (-1)^6 = 27 \end{aligned}$$



6 x

az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ permutáció páros,
előjele +1

$$\begin{aligned} &\uparrow \\ &= 0, \text{ mivel} \\ \varphi(\vec{v}_4, \vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_1) &= -\varphi(\vec{v}_4, \vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_1) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{csere} \end{aligned}$$

$$F = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{f}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{f}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

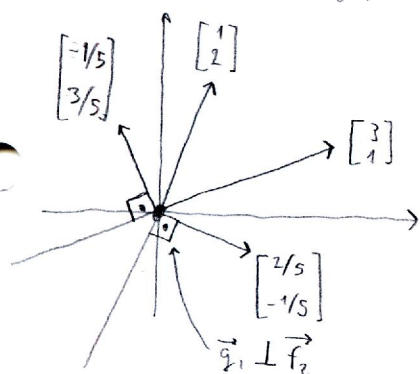
$$G = F^{-1} = \begin{bmatrix} 2/5 & -1/5 \\ -1/5 & 3/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\vec{g}_1^T \\ -\vec{g}_2^T \end{bmatrix}, \quad \vec{g}_1 = \begin{bmatrix} 2/5 \\ -1/5 \end{bmatrix}, \quad \vec{g}_2 = \begin{bmatrix} -1/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$$

$$GF = \begin{bmatrix} -\vec{g}_1^T \\ -\vec{g}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{vagyis } \vec{g}_1^T \vec{f}_1 = (\vec{g}_1, \vec{f}_1) = 1, \quad (\vec{g}_1, \vec{f}_2) = 0 \\ (\vec{g}_2, \vec{f}_1) = 0, \quad (\vec{g}_2, \vec{f}_2) = 1$$

F oszlopai és $G = F^{-1}$ sorai duális bázisokat alkotnak

$$(\vec{g}_i, \vec{f}_j) = \delta_{ij}$$

Ha $\vec{x} = \alpha_1 \vec{f}_1 + \alpha_2 \vec{f}_2$, akkor pl. $\alpha_1 = (\vec{g}_1, \vec{x}) = (\vec{g}_1, \alpha_1 \vec{f}_1 + \alpha_2 \vec{f}_2) = \alpha_1 \underbrace{(\vec{g}_1, \vec{f}_1)}_1 + \alpha_2 \underbrace{(\vec{g}_1, \vec{f}_2)}_0$



$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\vec{g}_1, \vec{x}) \\ (\vec{g}_2, \vec{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\vec{g}_1^T \\ -\vec{g}_2^T \end{bmatrix} \vec{x} = F^{-1} \vec{x},$$

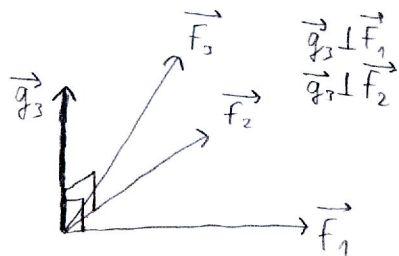
amivel ekvivalens

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{f}_1 + \alpha_2 \vec{f}_2 = \begin{bmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

3dim

$$E = GF = F^{-1}F = \begin{bmatrix} -\vec{g}_1^T \\ -\vec{g}_2^T \\ -\vec{g}_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{g}_3^T \vec{f}_1 = (\vec{g}_3, \vec{f}_1) = 0 = \vec{g}_3^T \vec{f}_2 = (\vec{g}_3, \vec{f}_2) = 0 \Leftrightarrow \vec{g}_3 \perp \vec{f}_1, \vec{f}_2$$



Megjegyzés. Ha G -nek pl. a harmadik sorát (amit $\vec{g}_3^T$ -vel jelöltünk) az oszlopvektorok duális vektorterének az elemének tekintjük, akkor

$$\vec{g}_3^T \vec{f}_1 = \vec{g}_3^T \vec{f}_2 = 0 \text{ azt jelenti, hogy } \vec{f}_1, \vec{f}_2 \in \ker \vec{g}_3^T.$$

(Emlékeztető: duális vektortér = a vektortérből $\mathbb{R}$ -be való lineáris leképezések halmaza)

$\det(A)=0 \iff$ inverz A^{-1} nem létezik.

Ha $\det(A) \neq 0$, akkor $(A^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{\det(A)} \det(\hat{A}_{ji})$. Az, hogy ez a formula nem működik, ha $\det(A)=0$, önmagában még nem jelenti azt, hogy A^{-1} nem létezik. (Pl. a másodfokú megoldóképlet nem működik az $0x^2+2x+3=0$ egyenletre, de $x=-\frac{3}{2}$ ettől még gyök.)

Visszont $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ miatt $\det(E)=1 = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$, így ha $\det(A)=0$, akkor A^{-1} nem létezik, hiszen ha létezne, akkor $1=0 \cdot \det(A^{-1})$ állna fenn.

Tétel: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Bizonyítás:

multilineáris

① $A: \varphi: V \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ antiszimmetrikus leképezések tere 1 dimenziós, hiszen egy ilyen φ -t meghatároz az, hogy mennyi $\varphi(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = \varphi_0$. Ekkor $\varphi = \varphi_0 \cdot \det$, hiszen $\det(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = 1$.

② $\varphi(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \det(A\vec{v}_1, \dots, A\vec{v}_n)$ antiszimmetrikus, így $\det(A\vec{v}_1, \dots, A\vec{v}_n) = c(A) \cdot \det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ valamely $c(A)$ skalárra.

Beírva $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ -t $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ helyére:

$$\det(A\vec{e}_1, \dots, A\vec{e}_n) = c(A) \cdot \underbrace{\det(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)}_{=1} \implies c(A) = \det(A),$$

hiszen ha $A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \\ 1 \end{bmatrix}$, akkor $\det(A) = \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \det(A\vec{e}_1, \dots, A\vec{e}_n)$

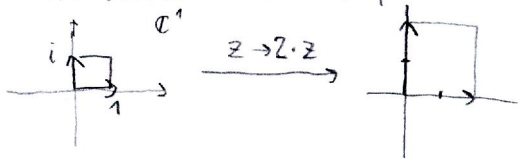
$$\textcircled{3} \quad A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vdots \\ \vec{b}_n \\ 1 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} A\vec{b}_1 \\ \vdots \\ A\vec{b}_n \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(AB) = \det(A\vec{b}_1, \dots, A\vec{b}_n) = c(A) \det(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n) = \det(A) \cdot \det(B). \quad \text{QED.}$$

Egjegyzés: 1,2,3 dimenzió valós vektorterek esetén a tétel következik a determináns geometriai interpretációjából, pl. 2dimenzióban ha az $\vec{x} \xrightarrow{A} A\vec{x}$ leképezés $\det(A)$ -szorosára növeli az orientált területet, míg az $\vec{x} \xrightarrow{B} B\vec{x}$ $\det(B)$ -szorosára, akkor az összekött $\vec{x} \xrightarrow{B} B\vec{x} \xrightarrow{A} AB\vec{x}$ leképezés $\det(A) \cdot \det(B) = \det(AB)$ -szorosára fogja.

Ez az érv nehezen használható nem valós vektorterekben, pl.

$$\textcircled{1} \quad \varphi: \mathbb{C}^1 \rightarrow \mathbb{C}^1, \quad \varphi(z) = 2 \cdot [z]$$

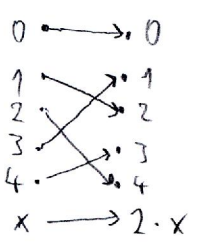


Terület $2^2 = 4$ -szeresére
 $n=0$

$$\textcircled{2} \quad \varphi: \mathbb{F}_5^1 \rightarrow \mathbb{F}_5^1, \quad \varphi(x) = 2 \cdot [x]$$

($\mathbb{F}_5^1 \cong$ az egészek 5-tel való osztási maradékai)

itt nem sok értelme van orientált hosszúságról beszélni.



Pivotálás (Gauss-Jordan)

56

egyenletmegoldás: $A\vec{x} = \vec{b}$

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 = \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$$

$\vec{x}$ kiszámítása $\leftrightarrow \vec{b}$ kifejezése az $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorokkal $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ helyett

mindkét három lépésben:

$$\begin{aligned} \vec{b} &= b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3 \\ &= b'_1\vec{a}_1 + b'_2\vec{e}_2 + b'_3\vec{e}_3 \\ &= b''_1\vec{a}_1 + b''_2\vec{a}_2 + b''_3\vec{e}_3 \\ &= b'''_1\vec{a}_1 + b'''_2\vec{a}_2 + b'''_3\vec{e}_3 \end{aligned}$$

bázis: csere

$$\begin{aligned} \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 &\rightarrow \vec{e}_1 \leftarrow \vec{a}_1 \\ \vec{a}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 &\rightarrow \vec{e}_2 \leftarrow \vec{a}_2 \\ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{e}_3 &\rightarrow \vec{e}_3 \leftarrow \vec{a}_3 \\ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \end{aligned}$$

eredmény: $\vec{x} = \begin{bmatrix} b'''_1 \\ b'''_2 \\ b'''_3 \end{bmatrix}$

Példa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

pivottábla:

	a_1	a_2	a_3	b
e_1	1	2	3	4
e_2	4	5	6	5
e_3	7	8	2	6

itt pl. az utolsó oszlop jelentése:

$$\vec{b} = 4\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3$$

cél:

	a_1	a_2	a_3	b
a_1	1	0	0	x
a_2	0	1	0	x
a_3	0	0	1	x

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3$$

Számítsuk ki pl. a $\vec{e}_2 \leftarrow \vec{a}_3$ csere hatását a táblázaton!

	a_1	a_2	a_3	b
e_1	1	2	3	4
e_2	4	5	6	5
e_3	7	8	2	6

$\vec{e}_2 \leftarrow \vec{a}_3$

	a_1	a_2	a_3	b
e_1	x	x	0	x
a_3	x	x	1	x
e_3	x	x	0	x

az $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{b}$ vektorok kifejezése $\vec{e}_1, \vec{a}_3, \vec{e}_3$ segítségével

$$\vec{a}_3 = 3\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \rightarrow \vec{e}_2 = \frac{1}{6}(\vec{a}_3 - 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_3)$$

$$\text{így pl. } \vec{a}_1 = 1\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3 = 1\vec{e}_1 + 4 \cdot \frac{1}{6}(\vec{a}_3 - 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_3) + 7\vec{e}_3$$

$$= \left(1 - \frac{4 \cdot 3}{6}\right)\vec{e}_1 + \frac{4}{6}\vec{a}_3 + \left(7 - \frac{4 \cdot 2}{6}\right)\vec{e}_3$$

$$= \frac{1 \cdot 6 - 4 \cdot 3}{6}\vec{e}_1 + \frac{4}{6}\vec{a}_3 + \frac{7 \cdot 6 - 4 \cdot 2}{6}\vec{e}_3$$

	a_1	a_2	a_3	b
e_1	$\frac{1 \cdot 6 - 4 \cdot 3}{6}$	x	0	x
a_3	$4/6$	x	1	x
e_3	$\frac{7 \cdot 6 - 4 \cdot 2}{6}$	x	0	x

$$\vec{a}_3 = 0\vec{e}_1 + 1\vec{a}_3 + 0\vec{e}_3$$

Ugyanez az eljárás alkalmazandó az a_2, b oszlopokra is

Tehát az e_2 sorban és a_3 oszlopban álló $\boxed{6}$ -os elemhez tartozó pivotálás

hadd sa:

①

$$\begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c|ccc} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline x & x & x & x \\ x & x & \boxed{6} & x \\ x & x & x & x \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} e_1 \\ a_3 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c|ccc} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline x & x & 0 & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & 0 & x \end{array}$$

pivot elem oszlopa
 $\rightarrow 1$, plusz néhány nulla

②

$$\begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c|ccc} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline x & x & x & x \\ 4 & 5 & \boxed{6} & 5 \\ x & x & x & x \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} e_1 \\ a_3 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c|ccc} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline x & x & x & x \\ 4/6 & 5/6 & 1 & 5/6 \\ x & x & x & x \end{array}$$

pivot elem sora
 $\rightarrow$ oszd el a pivot elemmel

③

$$\begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c|ccc} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline x & x & x & x \\ 4 & x & \boxed{6} & x \\ \textcircled{7} & x & 2 & x \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} e_1 \\ a_3 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c|ccc} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ \frac{6 \cdot 7 - 4 \cdot 2}{6} & x & x & x \end{array}$$

a többi elem, pl.:
 $\textcircled{7} \rightarrow \frac{\boxed{6} \cdot \textcircled{7} - 4 \cdot 2}{\boxed{6}}$

Tehát

$$\begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c|ccc} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & \boxed{6} & 5 \\ 7 & 8 & 2 & 6 \end{array} \xrightarrow{\vec{e}_2 \leftarrow \vec{a}_3} \begin{array}{c} e_1 \\ a_3 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c|ccc} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline -1 & -1/2 & 0 & 3/2 \\ 4/6 & 5/6 & 1 & 5/6 \\ 17/3 & 19/3 & 0 & 13/3 \end{array}$$

$\vec{e}_1 \leftarrow \vec{a}_1$

$$\begin{array}{c} a_1 \\ a_3 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c|ccc} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline 1 & 1/2 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1/2 & 1 & 11/6 \\ 0 & \boxed{7/2} & 0 & 77/6 \end{array} \xrightarrow{\vec{e}_3 \leftarrow \vec{a}_2} \begin{array}{c} a_1 \\ a_3 \\ a_2 \end{array} \begin{array}{c|ccc} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline 1 & 0 & 0 & -10/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 11/3 \end{array}$$

sor-permutáció

$$\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \begin{array}{c|ccc} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline 1 & 0 & 0 & -10/3 \\ 0 & 1 & 0 & 11/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Vagyis $\vec{b} = -\frac{10}{3}\vec{a}_1 + \frac{11}{3}\vec{a}_2 + 0\vec{a}_3$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = -\frac{10}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} + \frac{11}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10/3 \\ 11/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Megjegyzés: A numerikus hibaterjedés vagy pontatlan adatok miatt általában a legnagyobb kiválaszható elem a legalkalmasabb pivot.

fejben számolásmál célszerű (ha vannak) a ± 1 pivot elemeket használni.

∞ vagy 0 megoldás

58

$$\infty: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 17 \\ 26 \end{bmatrix} \quad A\vec{x} = \vec{b} \quad \left. \begin{array}{l} A\vec{x}_{\text{part}} = \vec{b} \\ A\vec{x}_{\text{hom}} = \vec{0} \end{array} \right\} \Rightarrow A(\vec{x}_{\text{part}} + \vec{x}_{\text{hom}}) = \vec{b}$$

Pivottábla:

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ e_1 & 1 & 2 & 3 & 8 \\ e_2 & 4 & 5 & 6 & 17 \\ e_3 & 7 & 8 & 9 & 26 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ e_1 & -1 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ a_3 & 2/3 & 5/6 & 1 & 17/6 \\ e_3 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ a_1 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ a_3 & 0 & 1/2 & 1 & 5/2 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Az utolsó $e_3 \leftarrow a_2$ cserét már nem tudjuk elvégezni a 0 pivotalelemmel.

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ a_1 & \times & \times & \times & 1/2 \\ a_3 & \times & \times & \times & 5/2 \\ e_3 & \times & \times & \times & 0 \end{array} \iff \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a}_1 + \frac{5}{2}\vec{a}_3 + 0\vec{e}_3 \iff \vec{x}_{\text{part}} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 5/2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 5/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 17 \\ 26 \end{bmatrix}$$

Tehát a "bázisból" leolvasható egy darab (partikuláris) megoldás

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ a_1 & \times & 1/2 & \times & \times \\ a_3 & \times & 1/2 & \times & \times \\ e_3 & \times & 0 & \times & \times \end{array} \iff \vec{a}_2 = \frac{1}{2}\vec{a}_1 + \frac{1}{2}\vec{a}_3 + 0\vec{e}_3, \quad \iff \vec{x}_{\text{hom}_1} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az egyenlet rendszer általános megoldása: $\vec{x}_{\text{alt}} = \vec{x}_{\text{part}} + (\text{lin. kombinációja } \vec{x}_{\text{hom}_1} \text{-nek})$

$$t_1 \in \mathbb{R}, \quad \vec{x}_{\text{alt}} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 5/2 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 + t_1 \cdot 1/2 \\ 0 + t_1 \cdot (-1) \\ 5/2 + t_1 \cdot 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 17 \\ 26 \end{bmatrix}$$

Megoldás: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 17 \\ 25 \end{bmatrix}$

Pivottábla:

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ e_1 & 1 & 2 & 3 & 8 \\ e_2 & 4 & 5 & 6 & 17 \\ e_3 & 7 & 8 & 9 & 25 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ e_1 & -1 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ a_3 & 2/3 & 5/6 & 1 & 17/6 \\ e_3 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ a_1 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ a_3 & 0 & 1/2 & 1 & 5/2 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

Az e_3 sor miatt nincs megoldás, hiszen

$\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a}_1 + \frac{5}{2}\vec{a}_3 - 1\vec{e}_3$, viszont $\vec{e}_3$ nem írható fel $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ lineáris kombinációjaként, vagyis $\vec{b}$ nem írható fel $\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3$ alakban.

Az egyenletrendszer megoldásának leolvasása az utolsó pivottáblából:

0 megoldás. példa:

	a_1	a_2	a_3	a_4	b
a_3	0	3	1	5	7
e_2	0	0	0	0	0
a_1	1	4	0	6	8
e_4	0	0	0	0	9

Itt a pivotálás nem folytatható tovább, mivel a 2. és 4. sorokban az $a_{1,2,3,4}$ oszlopokban csupa 0 van. Viszont az e_4 sor $\boxed{9}$ eleme nem nulla, így $\vec{b}$ nem fejezhető ki az $\vec{a}_{1,2,3,4}$ vektorok lineáris kombinációjaként, vagyis NINCS megoldás.

∞ megoldás. példa:

	a_1	a_2	a_3	a_4	b
a_3	0	3	1	5	7
e_2	0	0	0	0	0
a_1	1	4	0	6	8
e_4	0	0	0	0	0

sor-permutáció →

	a_1	a_2	a_3	a_4	b
a_1	1	4	0	6	8
e_2	0	0	0	0	0
a_3	0	3	1	5	7
e_4	0	0	0	0	0

Itt az a_1, a_3 oszlopok "triviálisak": $\vec{a}_1 = 1 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{a}_3 + 0 \cdot \vec{e}_4$, $\vec{a}_3 = 0 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{a}_3 + 0 \cdot \vec{e}_4$. Mivel az e_2, e_4 sorokban csupa 0 van, így a b oszlopból leolvasható egy megoldás:

	b
a_1	8
e_2	0
a_3	7
e_4	0

$$\vec{b} = 8\vec{a}_1 + 0\vec{e}_2 + 7\vec{a}_3 + 0\vec{e}_4$$

$$\Leftrightarrow \vec{b} = 8\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 + 7\vec{a}_3 + 0\vec{a}_4$$

$$\Leftrightarrow \vec{x}_{part} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A maradék a_2, a_4 oszlopok azt mutatják, hogy $\vec{a}_2, \vec{a}_4$ kifejezhető $\vec{a}_1$ és $\vec{a}_3$ -mal:

	a_2	a_4	$\dots$
a_1	4	6	
e_2	0	0	
a_3	3	5	$\dots$
e_4	0	0	

$$\vec{a}_2 = 4\vec{a}_1 + 0\vec{e}_2 + 3\vec{a}_3 + 0\vec{e}_4$$

$$\vec{0} = 4\vec{a}_1 - 1\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3 + 0\vec{a}_4$$

$$\vec{a}_4 = 6\vec{a}_1 + 0\vec{e}_2 + 5\vec{a}_3 + 0\vec{e}_4$$

$$\vec{0} = 6\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 + 5\vec{a}_3 - 1\vec{a}_4$$

$$\vec{x}_{hom1} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_{hom2} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Az általános megoldás: $\vec{x}_{alt} = \vec{x}_{part} + t_1 \vec{x}_{hom1} + t_2 \vec{x}_{hom2} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

Tehát $\vec{x}_{alt}$ generálása az utolsó sorperműtált pivottáblából:

	a_1	a_2	a_3	a_4	b
a_1	1	4	0	6	8
e_2	0	0	0	0	0
a_3	0	3	1	5	7
e_4	0	0	0	0	0

$\vec{x}_{part} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$
 $\vec{x}_{hom1} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$
 $\vec{x}_{hom2} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$

← a_2, a_4 oszlopai + $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

∞ megoldás, még egy példa:

	a_1	a_2	a_3	a_4	b
a_4	2	3	0	1	4
l_3	0	0	0	0	0
l_4	0	0	0	0	0
a_3	5	6	1	0	7

sor permutáció

	a_1	a_2	a_3	a_4	b
l_3	0	0	0	0	0
l_4	0	0	0	0	0
a_3	5	6	1	0	7
a_4	2	3	0	1	4

A sorpermutáció az a_4, a_3 sorok címkeit hozza a megfelelő pozíciókba.
a megoldás leolvasása a táblázat nemtriviális a_1, a_2, b oszlopaiból:

$$\begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \vec{x}_{\text{part}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \vec{x}_{\text{hom}_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \vec{x}_{\text{hom}_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

általános megoldás: $\vec{x}_{\text{part}} + (\vec{x}_{\text{hom}_1} \text{ és } \vec{x}_{\text{hom}_2} \text{ lineáris kombinációi}) = \vec{x}_{\text{ált}}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \vec{x}_{\text{ált}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad t_1, t_2, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Még egy példa: Oldd meg az $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5$ egyenlet rendszert pivotálással!
 $4x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 10$

	a_1	a_2	a_3	b
l_1	2	3	4	5
l_2	4	6	8	10

$\longrightarrow$

	a_1	a_2	a_3	b
a_1	1	3/2	2	5/2
l_2	0	0	0	0

a megoldás leolvasása:

	a_1	a_2	a_3	b
a_1	1	3/2	2	5/2
l_2	0	0	0	0

$\longleftrightarrow$

	a_1	a_2	a_3	b
a_1	1	3/2	2	5/2
a_2	0	0	0	0
a_3	0	0	0	0

$$\vec{x}_{\text{ált}} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 3/2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 5/2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ugyanez pl. az a_1 pivot elemmel:

	a_1	a_2	a_3	b
a_2	2/3	1	4/3	5/3
l_2	0	0	0	0

$\longleftrightarrow$

	a_1	a_2	a_3	b
a_1	0	0	0	0
a_2	2/3	1	4/3	5/3
a_3	0	0	0	0

$$\vec{x}_{\text{ált}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5/3 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2/3 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 4/3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Inverz Matriks

61

$$A A^{-1} = E$$

Pl. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$A A^{-1} = E \iff A \vec{x}_1 = \vec{e}_1, A \vec{x}_2 = \vec{e}_2, A \vec{x}_3 = \vec{e}_3$$

Példa: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

a probléma ugyanaz mint az $A \vec{x} = \vec{b}$ egyenletmegoldásnál, csak most $\vec{b} = \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$
jobb oldál

Kezdeti tábla:

	a_1	a_2	a_3	e_1	e_2	e_3
e_1	1	2	3	1	0	0
e_2	4	5	6	0	1	0
e_3	7	8	2	0	0	1

	a_1	a_2	a_3	e_1	e_2	e_3
e_1	-1	-1/2	0	-1	1/2	0
a_3	2/3	5/6	1	2/3	-1/6	0
e_3	17/3	19/3	0	17/3	-19/6	1

	a_1	a_2	a_3	e_1	e_2	e_3
a_1	1	1/2	0	-1	1/2	0
a_3	0	1/2	1	2/3	-1/6	0
e_3	0	7/2	0	17/3	-19/6	1

	a_1	a_2	a_3	e_1	e_2	e_3
a_1	1	0	0	-38/21	20/21	-1/7
a_3	0	0	1	-1/7	2/7	-1/7
a_2	0	1	0	34/21	-19/21	2/7

sor-permutáció

	a_1	a_2	a_3	e_1	e_2	e_3
a_1	1	0	0	-38/21	20/21	-1/7
a_2	0	1	0	34/21	-19/21	2/7
a_3	0	0	1	-1/7	2/7	-1/7

Tehát $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -38/21 & 20/21 & -1/7 \\ 34/21 & -19/21 & 2/7 \\ -1/7 & 2/7 & -1/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Determináns

pivotálás hatása: ① a pivotelem sorát elosztjuk a pivotelemmel.

② a többi sorból kivonjuk a pivotelem sorának annyiszorosát, hogy a pivotelem fölötti elem nulla legyen.

$$P1. \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ -7 & -8 & \vdots \\ -5 & 4 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ -7 \cdot 4 - 5 \cdot 8 & 0 & \vdots \\ -5/4 & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ -7 - \frac{8}{4} \cdot 5 & 0 & \vdots \\ -\frac{1}{4} \cdot 5 & \frac{1}{4} \cdot 4 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Determináns kiszámítása.

példa:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = -2$$

ugyanaz pivotálással:

$$\begin{array}{c} a_1 \ a_2 \\ e_1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\ e_2 \end{array} \xrightarrow{e_2 \leftarrow a_1} \begin{array}{c} a_1 \ a_2 \\ e_1 \begin{vmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 5/4 \end{vmatrix} \\ a_1 \end{array} \xrightarrow{e_1 \leftarrow a_2} \begin{array}{c} a_1 \ a_2 \\ a_2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ a_1 \end{array}$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \boxed{4} \cdot \boxed{1/2} \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{-1} = -2$$

Magyarázat: Mi történik a pivottábla soraival?

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 5/4 \end{bmatrix} \longrightarrow \frac{1}{1/2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 5/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

① egy sor megszorozása α -val α -szorosára növeli a determinánst

② egy sor számszorosa hozzáadása egy másik sorhoz változatlanul hagyja a determinánst

Tehát

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1/2} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

① ② párosan permutáció

$\text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \frac{\pi(1)=2}{\pi(2)=1} \text{ permutáció (nem mátrix)}$

Vagyis

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \boxed{4} \cdot \boxed{1/2} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1) = -2$$

Összgezve: Determináns kiszámítása =

① a mátrix pivottábláját egy permutáció mátrix alakjára hozzuk.

② a pivotelemek szorzata megszorozva a permutáció előjével megadja a determinánst.

Sajátérték, sajátvektor

Probléma: Adott $A, \vec{x}$, mennyi $A^n \vec{x}$? (A $n \times n$ dimenziós négyzetes mátrix)

Megoldási stratégia (2dim):

① Oldd meg az $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$ egyenletet!

Legyen két lineárisan független megoldás $\vec{v}_1$ és $\vec{v}_2$,

vagyis $A\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1$, $A\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2$.

② Írd fel az $\vec{x}$ vektort $\vec{v}_1$ és $\vec{v}_2$ lineáris kombinációjaként:

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2$$

③ Ekkor

$$A^n \vec{x} = A^n (\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2) = \alpha_1 A^n \vec{v}_1 + \alpha_2 A^n \vec{v}_2 = \alpha_1 \cdot \lambda_1^n \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \lambda_2^n \vec{v}_2,$$

$$\text{hiszen pl. } A^2 \vec{v}_1 = A \cdot A \vec{v}_1 = A \cdot \lambda_1 \vec{v}_1 = \lambda_1 A \vec{v}_1 = \lambda_1 \cdot \lambda_1 \vec{v}_1 = \lambda_1^2 \vec{v}_1$$

Hogyan oldjuk meg az $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$ nemlineáris sajátérték egyenletet?

$$A\vec{v} = \lambda \vec{v} \quad \vec{v} \neq \vec{0}$$

$$A\vec{v} = \lambda E \vec{v}$$

$$\left. \begin{aligned} (A - \lambda E) \vec{v} &= \vec{0} \\ (A - \lambda E) \vec{0} &= \vec{0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} A - \lambda E : \vec{v} &\rightarrow \vec{0} \\ A - \lambda E : \vec{0} &\rightarrow \vec{0} \end{aligned}$$

tehát az $A - \lambda E$ lin. leképezés nem bijektív,
nem invertálható, vagyis

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Tehát az $A\vec{v} = \lambda \vec{v}, \vec{v} \neq \vec{0}$ megoldása:

① Oldd meg az $\det(A - \lambda E) = 0$ egyenletet.

② Az egyenlet mindegyik λ_i gyökére oldd meg

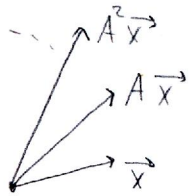
a $A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$ egyenletet, ami már csak egy lineáris egyenlet
a $\vec{v}_i$ sajátvektorra.

Ha sikerül a vektorterünkben egy sajátvektorból álló bázist találnunk,
akkor megoldottuk az $A^n \vec{x}$ kiszámításának a problémáját.

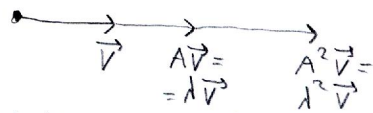
(Sajnos elképzelhető, hogy ilyen bázis nem létezik, ennek az esetnek
a kezelése kissé bonyolultabb.)

Továbbá ha A valós mátrix, akkor is lehetnek a $\det(A - \lambda E) = 0$ egyenlet
gyökei komplex számok, így a bázisunk sokszor komplex vektorokból
fog állni.)

Geometria interpretáció

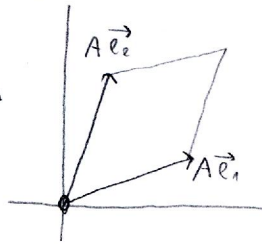
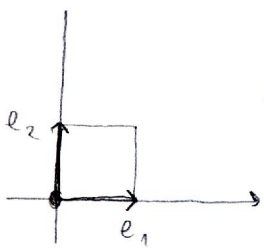


A^n hatása bonyolult egy tetszőleges $\vec{x}$ vektoron.

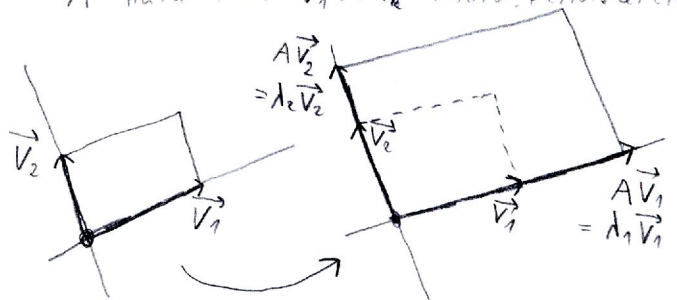


A^n hatása egyszerű egy $\vec{V}$ sajátvektoron

A hatása az $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ koord. rendszeren:



A hatása a $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_n$ koord. rendszeren



A^n kiszámítása (2dim illusztráció, $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = 7, \vec{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 3, \vec{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$)

① $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}_V \leftarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_e$ koordináta-rendszerváltás: $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}_V = S^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_e$

② A hatása az $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}_V$ koordinátákon: $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}_V = \begin{bmatrix} \lambda_1 \alpha_1 \\ \lambda_2 \alpha_2 \end{bmatrix}_V \leftarrow A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}_V$

③ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_e \leftarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}_V$ koordináta-rendszerváltás: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_e = \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{V}_1 & \vec{V}_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_S \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}_V = \alpha_1 \vec{V}_1 + \alpha_2 \vec{V}_2$

Összegezve mindezt:

$$A^n \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_e = \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{V}_1 & \vec{V}_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{③: } S} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}_V \xrightarrow{\text{②: } D^n} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}}_{D^n} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}_V}_{\text{①: } S^{-1} \vec{x} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}_V}$$

esetünkben $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_e = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_e = \begin{bmatrix} 7^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}$$

Vagyis

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad A^n = S D^n S^{-1}$$

ahol D a sajátértékekből álló diagonális mátrix, S pedig a sajátvektorokat tartalmazza.

Sajátérték, sajátvektor példák.

Probléma: keresd meg a sajátértékeket, majd keress egy sajátvektorokból álló bázist (ha van ilyen).

① Diagonális mátrix $\leftrightarrow$ triviális feladat

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \det(A - \lambda E) = \det \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 0^2$$

tehát $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$.

sajátvektorok: $(A - \lambda E) \vec{v} = \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$

$\lambda_1 = 2$

$$\begin{bmatrix} 2-2 & 0 \\ 0 & 3-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow 0x + 1y = 0, \rightarrow y = 0 \quad \text{sajátvektorok: } \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R}$$

$\lambda_2 = 3$

$$\begin{bmatrix} 2-3 & 0 \\ 0 & 3-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow -x + 0y = 0 \rightarrow x = 0 \quad \text{sajátvektorok: } \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}, y \in \mathbb{R}$$

Most válasszunk az $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$ alterekből két nem nulla vektort:

$$\lambda_1 = 2, \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda_2 = 3, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tehát egy diagonális mátrix esetén a standard bázis elemei sajátvektorok, a megfelelő diagonális elemmel mint sajátértékkel.

② $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \lambda_1 = 2, \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda_2 = 2, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

Itt csak egy sajátértéket ad az $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$ egyenlet, de mivel A diagonális, így van sajátvektorokból álló bázis.

③ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 = (2-\lambda)^2 \rightarrow \lambda = 2.$

$$(A - 2 \cdot E) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow y = 0, \text{ sajátvektorok: } \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

nincs sajátvektorokból álló bázis!

Ennek ellenére A^n kiszámítható:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n &= \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^n = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n + \binom{n}{1} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{n-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \binom{n}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{n-2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} + n \cdot 2^{n-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

binomiális együttható:
 $\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2}$

Itt a következőket használtuk fel:

- ① $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, vagyis a két mátrix kommutál.
- ② $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots$, ha $ab=ba$ (binomiális tétel)
- ③ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. felkt. Megjegyzés:

Jordan-normálforma. Tétel: Legyen A egy $n \times n$ -es komplex mátrix.

Ekkor létezik olyan invertálható S , hogy $S^{-1}AS = D$, ahol D egy blokk-diagonális mátrix, amelynek a diagonális blokkjai alakja a következő alakúak lehetnek:

$$[\lambda], \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \dots \text{ stb.} \quad (\text{Jordan blokkok})$$

például egy 2 dimenziós és 2 egydimenziós blokkot tartalmazó D lehetne pl.

$$D = \begin{bmatrix} \boxed{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{5} \end{bmatrix}$$

Ha ismerjük S -t, akkor $A^n = (SDS^{-1})^n = SDS^{-1} \cdot SDS^{-1} \cdot \dots \cdot SDS^{-1} = SD^nS^{-1}$,

viszont D^n kiszámítható, pl.

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}^n = \left(5 \cdot E + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_J \right)^n = 5^n \cdot E + \binom{n}{1} 5^{n-1} \cdot E \cdot J + \binom{n}{2} \cdot 5^{n-2} \cdot E \cdot J^2 + \binom{n}{3} \cdot 5^{n-3} \cdot E \cdot J^3 + \dots$$

ahol $J^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $J^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, így

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}^n = 5^n \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + n \cdot 5^{n-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \binom{n}{2} \cdot 5^{n-2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Megjegyzés: ugyanolyan típusú blokk-diagonális mátrixokkal könnyebb számolni, pl.

$$\begin{bmatrix} \boxed{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{6} & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{21} & 9 \\ 0 & 0 & \boxed{30} & 20 \end{bmatrix}$$

$[3] \cdot [1] = [3]$
 $[4] \cdot [2] = [8]$
 $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 9 \\ 30 & 20 \end{bmatrix}$

(67)

④ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 1 \cdot 0 \rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$

sajátvektorok:

$\lambda_1 = 2 \quad (A - 2 \cdot E) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2 & 1 \\ 0 & 3-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow y = 0$

$\lambda_2 = 3 \quad (A - 3 \cdot E) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-3 & 1 \\ 0 & 3-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} -1 \cdot x + 1 \cdot y = 0 \\ \rightarrow x = y \end{matrix}$

Megjegyzés: Az ugyanahhoz a saját értékekhez tartozó sajátvektorok alteret alkotnak (a $\vec{0}$ hozzávétele után), mivel

$$\left. \begin{matrix} A\vec{v}_1 = \lambda\vec{v}_1 \\ A\vec{v}_2 = \lambda\vec{v}_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} A(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = A\vec{v}_1 + A\vec{v}_2 = \lambda\vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_2 = \lambda(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \\ A(c \cdot \vec{v}_1) = c \cdot A\vec{v}_1 = c \cdot \lambda\vec{v}_1 = \lambda(c \cdot \vec{v}_1) \end{matrix}$$

A sajátalterei:

$\lambda_1 = 2, \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \quad \lambda_2 = 3, \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$

Sajátvektorokból álló bázis:

$\lambda_1 = 2, \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 3, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

⑤ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(3-\lambda) - 1 \cdot 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$
 $\rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2$

$\lambda_1 = 4 \quad (A - 4E) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow x = y$

$\lambda_2 = 2 \quad (A - 2E) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow x = -y$

A sajátalterei:

$\lambda_1 = 4, \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \quad \lambda_2 = 2, \left\{ \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$

bázis: $\lambda_1 = 4, \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 2, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Megjegyzés: Tétel: Ha A egy szimmetrikus valós mátrix, akkor létezik a sajátvektoraiból álló ortonormált bázis.

(esetünkben pl. lehetne

$\lambda_1 = 4, \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 2, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \dots)$

(6) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$
 $\longrightarrow \lambda_1 = 3+i, \quad \lambda_2 = 3-i$

(68)

Tehát a sajátvektorokat $\mathbb{R}^2$ helyett $\mathbb{C}^2$ -ben kell megkeresnünk.

$$\lambda_1 = 3+i \quad (A - (3+i)E) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} -ix + y = 0 \\ \longrightarrow y = +ix \end{matrix}$$

$$\lambda_2 = 3-i \quad (A - (3-i)E) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} ix + y = 0 \\ \longrightarrow y = -ix \end{matrix}$$

A sajátaltérvei:

$$\lambda_1 = 3+i, \quad \left\{ \begin{bmatrix} x \\ ix \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{C} \right\} \quad \lambda_2 = 3-i, \quad \left\{ \begin{bmatrix} x \\ -ix \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{C} \right\}$$

bázis:

$$\lambda_1 = 3+i, \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 3-i, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

(7) Fibonacci sorozat

$$F_0 = F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad (A - \lambda_1 E) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} x + (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})y = 0 \\ \longrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}y \end{matrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad (A - \lambda_2 E) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} x + (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})y = 0 \\ \longrightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}y \end{matrix}$$

bázis: $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\text{Ekkor } \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \alpha_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \end{matrix}$$

tehát $\alpha_1 = \frac{1}{10}(5+\sqrt{5}), \quad \alpha_2 = \frac{1}{10}(5-\sqrt{5}), \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}(5+\sqrt{5}) \vec{v}_1 + \frac{1}{10}(5-\sqrt{5}) \vec{v}_2$

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}(5+\sqrt{5}) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \vec{v}_1 + \frac{1}{10}(5-\sqrt{5}) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \vec{v}_2$$

vagyis

$$F_n = \frac{1}{10} \left((5+\sqrt{5}) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + (5-\sqrt{5}) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)$$

7. folyt. Megjegyzés: Fibonacci eredeti megoldása:

69

① Keresd meg $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ mértani sor $f_n = q^n$ nemnulla megoldásait

$$q \neq 0, \quad q^{n+1} = q^n + q^{n-1} \Rightarrow q^2 = q + 1 \Rightarrow q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

② Keresd α_1, α_2 számokat, hogy az $F_n = \alpha_1 q_1^n + \alpha_2 q_2^n$ sorozat kielégítse az $F_0 = 1, F_1 = 1$ kezdeti feltételeket is!

$$\begin{aligned} F_0 = 1 &\Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ F_1 = 1 &\Leftrightarrow \alpha_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \alpha_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{10}(5+\sqrt{5}) \\ \alpha_2 &= \frac{1}{10}(5-\sqrt{5}) \end{aligned}$$

⑧ Legyen $A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$. Ennek elemei nemnegatívak, és minden sor/oszlop elemeinek az összege 1. Tehát ez egy stochasztikus mátrix,

amelyik leírja az $\begin{matrix} 0.8 & 0.2 \\ \text{①} & \text{②} \\ 0.3 & \end{matrix}$ kétállapotú rendszerben az ① és ② állapotok

p_1 és p_2 valószínűségeinek az időbeli fejlődését: $\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{idő}]{\text{egységnyi}} A \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$.

Keresd meg A sajátértékeit és sajátvektorait!

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 0.8 - \lambda & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 - \lambda \end{vmatrix} = 0 = \lambda^2 - 1.5\lambda + 0.5 \rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1/2$$

$$\lambda_1 = 1: (A - 1 \cdot E) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.3 \\ 0.2 & -0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad -0.2x + 0.3y = 0 \rightarrow x = 1.5y$$

$$\lambda_2 = 1/2: (A - \frac{1}{2}E) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 0.3x + 0.3y = 0 \rightarrow x = -y$$

$$\text{bázis:} \quad \lambda_1 = 1, \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 1/2, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Megjegyzés:

① Stochasztikus mátrixok esetén $\lambda_1 = 1$ mindig sajátérték, a hozzá tartozó sajátvektor leírja az egyensúlyi, időben állandó valószínűség eloszlást.

② Mivel csak két állapot van az esetünkben, így a rendszer az egyensúlyi állapotában automatikusan teljesül a részletes egyensúly elve:

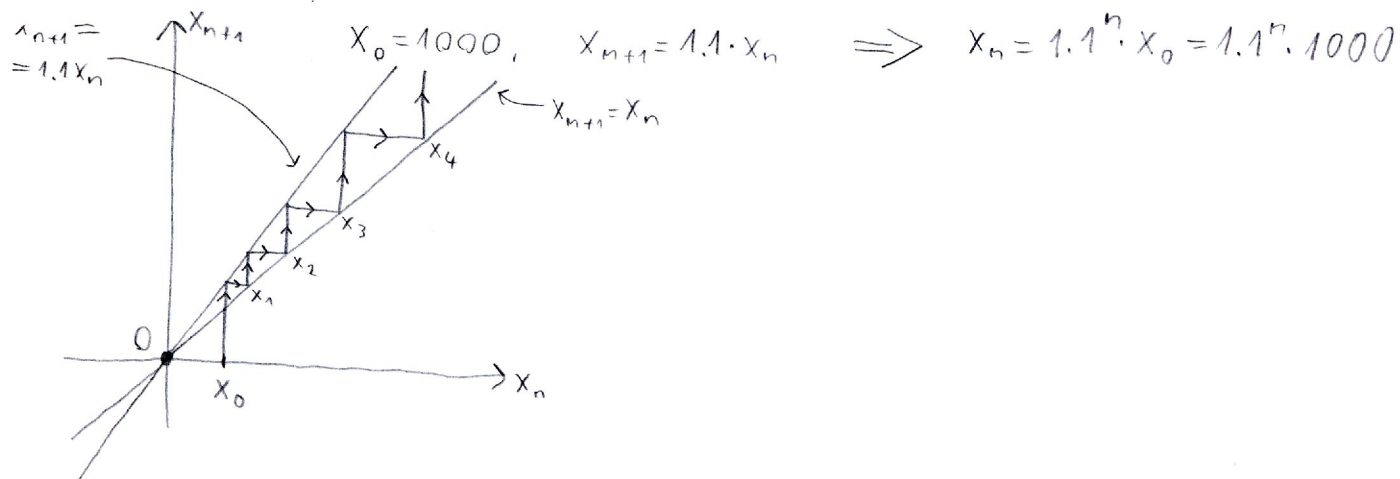
az ① $\rightarrow$ ② folyamat esélye ugyanannyi, mint a ① $\leftarrow$ ② fordított folyamaté:

$$W_{2 \leftarrow 1} P_1 = W_{1 \leftarrow 2} P_2$$

$$0.2 \cdot \frac{3}{5} = 0.3 \cdot \frac{2}{5}$$

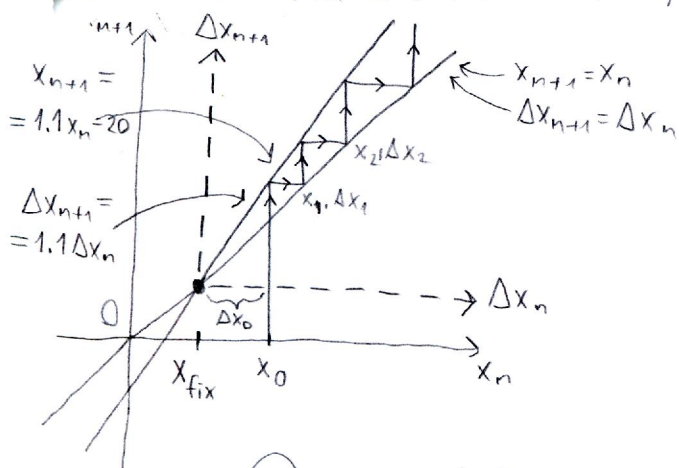
13

Egy bank évi 10%-os kamatot ad. Ha a betét 1000 Ft, mennyi lesz a számlán n év múlva?



14

Egy bank évi 10%-os kamatot ad, de levon évi 20 Ft kezelési költséget. Ha a betét 1000 Ft, mennyi lesz a számlán n év múlva?



$$x_0 = 1000 \quad x_{n+1} = 1.1x_n - 20 = f(x_n)$$

Mennyi $f^n(x_0) = f(f(\dots f(x_0)\dots)) = x_n$?

(I) Az $x_{n+1} = f(x_n)$ dinamikai rendszer egyensúlyi állapota, fix pontja:

$$x_{\text{fix}} = f(x_{\text{fix}})$$

$$x_{\text{fix}} = 1.1x_{\text{fix}} - 20 \Rightarrow x_{\text{fix}} = 200$$

(II) koordináta transzformáció az $x, \Delta x$ koord. rendszerek között:

$$\Delta x_n = x_n - x_{\text{fix}} = x_n - 200, \quad x_n = \Delta x_n + x_{\text{fix}} = \Delta x_n + 200$$

(III) Δx_n dinamikája:

$$x_{n+1} = 1.1x_n - 20$$

$$\Delta x_{n+1} + 200 = 1.1(\Delta x_n + 200) - 20$$

$$\Delta x_{n+1} = 1.1\Delta x_n$$

$$\text{Vagyis } \Delta x_n = 1.1^n \Delta x_0.$$

$$\text{Tehát: } x_0 = 1000, \Delta x_0 = x_0 - x_{\text{fix}} = 1000 - 200, \Delta x_n = 1.1^n \Delta x_0, x_n = \Delta x_n + 200,$$

$$\text{Vagyis: } x_n = 1.1^n (1000 - 200) + 200.$$

Megjegyzés: Ugyanez mátrixhatványozással:

(I) beágyazás egyet több dimenzióba: $x_0 = 1000 \rightarrow \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1 \end{pmatrix}$

(II) Dinamika 2dim.-ben: $x_{n+1} = 1.1x_n - 20 \rightarrow \vec{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 & -20 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Tehát } x_n: \begin{pmatrix} x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 & -20 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 & -20 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{pmatrix} 1000 \\ 1 \end{pmatrix}$$

14 folyt.

Megjegyzés: Mit lehet tenni egy nemlineáris $x_{n+1} = f(x_n)$

dinamikai rendszer esetén? Lineáris approximáció a fixpontok körül.

Legyen $x_{n+1} = 3x_n(1-x_n) = f(x_n)$.

① keresd meg a fixpontokat!

$$x_{\text{fix}} = f(x_{\text{fix}}) = 3x_{\text{fix}}(1-x_{\text{fix}})$$

$$x_{\text{fix}} = 0 \quad \text{vagy} \quad 1 = 3 - 3x_{\text{fix}} \longrightarrow x_{\text{fix}} = \frac{2}{3}$$

a) $x_{\text{fix}} = 0$:

$$\Delta x_n = x_n - x_{\text{fix}} = x_n - 0, \quad x_n = x_{\text{fix}} + \Delta x_n = 0 + \Delta x_n$$

$$\Delta x_{n+1} = f(x_{\text{fix}} + \Delta x_n) - x_{\text{fix}} = 3(0 + \Delta x_n)(1 - [0 + \Delta x_n]) - 0 = 3\Delta x_n - 3\Delta x_n^2$$

tehát ha $x_n \approx x_{\text{fix}} = 0$, akkor $|3\Delta x_n^2| \ll |3\Delta x_n|$, így jó közelítéssel

$$\Delta x_{n+1} \approx 3\Delta x_n, \quad \text{vagyis} \quad \Delta x_n \approx 3^n \cdot \Delta x_0.$$

Ez addig jó közelítés, ameddig $\Delta x_n \approx 0$, ami elég gyorsan megbotlik.
a 3^n szorzó miatt.b) $x_{\text{fix}} = \frac{2}{3}$:

$$\Delta x_n = x_n - \frac{2}{3}, \quad x_n = \frac{2}{3} + \Delta x_n$$

$$\Delta x_{n+1} = f\left(\frac{2}{3} + \Delta x_n\right) - \frac{2}{3} = 3 \cdot \left(\frac{2}{3} + \Delta x_n\right) \left(1 - \left[\frac{2}{3} + \Delta x_n\right]\right) - \frac{2}{3} = -1 \cdot \Delta x_n - 3\Delta x_n^2$$

tehát ha $x_n \approx x_{\text{fix}} = \frac{2}{3}$, akkor $|3\Delta x_n^2| \ll |1 \cdot \Delta x_n|$, így jó közelítéssel

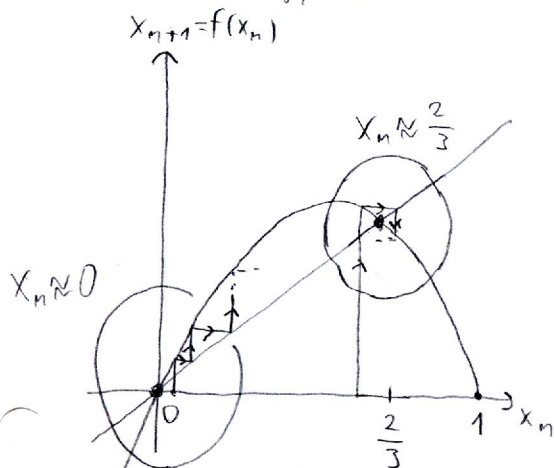
$$\Delta x_{n+1} \approx -1 \cdot \Delta x_n, \quad \text{vagyis} \quad \Delta x_n \approx (-1)^n \cdot \Delta x_0.$$

Ez addig jó közelítés, ameddig $\Delta x_n \approx 0$, sajnos az, hogy ez addig érvényes, az csak nemlineáris rendszer vizsgálatával állapítható meg.

Megjegyzés: az a) és b) esetekből 3, illetve -1 szorzók kiszámolása deriválással:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d(3x-3x^2)}{dx} = 3-6x, \quad f'(0) = 3-6 \cdot 0 = 3, \quad f'\left(\frac{2}{3}\right) = 3-6 \cdot \frac{2}{3} = -1.$$

Grafikus magyarázat:



A fixpontok körül a lineáris dinamika jól közelíti a nemlineáris, sokkal bonyolultabbat.

