

komplex számok.

53

Definíció 1. $(\mathbb{C}, +, \cdot, ^{-1}) = (\mathbb{R}^2, +, \cdot, ^{-1})$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \leftarrow \text{egyedül } (0, 0) \text{ nem invertálható} \Rightarrow \mathbb{C} \text{ egy test}$$

$$\text{Ekkor } (1, 0) \cdot (a, b) = (a, b), (0, 0) + (a, b) = (a, b), (a, b) \cdot (a, b)^{-1} = (1, 0)$$

Definíció 2. $\mathbb{R}[x]$ az egyváltozós valós polinomok algebraja a $+$, $\cdot$ műveletekkel.

$\sim$ ekvivalenciareláció: $f(x) \sim g(x)$, ha $f(x) - g(x) = h(x) \cdot (x^2 + 1)$ valamely $h(x)$ polinomra.

$\mathbb{C}$ -t $\mathbb{R}[x]$ ekvivalenciaosztályai alkotják.

Ez a definíció azt jelenti, hogy $\mathbb{C}$ -t az $a + bi$ alakú számok (itt $a, b \in \mathbb{R}$) alkotják, ahol az i szimbólummal úgy számolunk, mint az x változóval,

kivéve, hogy $i^2 + 1 = 0 \rightarrow i^2 = -1$, vagyis formálisan $i = \sqrt{-1}$.

Definíció 3.

Legyen $I = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $I^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -E$, és vegyük a $K(a, b) = aE + bI$, $a, b \in \mathbb{R}$ alakú mátrixok kétdimenziós vektorteret. Ez egy részalgebraja a 2×2 mátrixok $\text{Mat}_2(\mathbb{R})$ algebrajának, hiszen

$$K(a, b) + K(c, d) = (aE + bI) + (cE + dI) = (a + c)E + (b + d)I = K(a + c, b + d),$$

$$\begin{aligned} K(a, b) K(c, d) &= (aE + bI)(cE + dI) = (acE^2 + bdI^2) + (adEI + bcIE) \\ &= (ac - bd)E + (ad + bc)I = K(ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

$$\text{Itt } K(1, 0) \text{ az egységelem: } K(1, 0) K(a, b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = K(a, b)$$

$$K(0, 0) \text{ a nulla: } K(0, 0) + K(a, b) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = K(a, b)$$

Továbbá $K(0, 0)$ -on kívül bármely elem invertálható:

$$K(a, b)^{-1} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a \cdot a - (-b) \cdot b} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = K\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$$

$\mathbb{C}$ azonosítható (izomorf) a $\{K(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ mátrixok algebrajával.

Megjegyzés: ezek közül talán Def. 2. a leghasznosabb, ez fejezi ki azt az elvet, hogy

" i -vel úgy számolunk, mint egy x változóval, kivéve, hogy $i^2 = -1$."

Trigonometrikus alak.

$$K(a,b) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \sqrt{a^2+b^2} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{bmatrix}}_{\substack{\text{ortogonális mátrix,} \\ \text{determináns}=1}} = r \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}}_{\text{2dim elforgatás}} = r \cdot R_\alpha,$$

$a+bi$ abszolút értéke 54

ahol $r = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$, $\cos \alpha = \frac{a}{r}$, $\sin \alpha = \frac{b}{r}$, $\alpha = \arctg(\frac{b}{a})$ moduló π .

arkusztangens,
"tg" függvény "inverze"

Szorzás:

$$\begin{aligned} a+bi &= r(\cos \alpha + i \sin \alpha) & \longleftrightarrow & K(a,b) = r \cdot R_\alpha \\ c+di &= s(\cos \beta + i \sin \beta) & \longleftrightarrow & K(c,d) = s \cdot R_\beta \end{aligned}$$

$$K(a,b)K(c,d) = r \cdot R_\alpha \cdot s \cdot R_\beta = (rs) R_{\alpha+\beta}$$

$$\begin{aligned} (a+bi)(c+di) &= r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot s(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= (rs)(\cos(\alpha+\beta) + i \sin(\alpha+\beta)) \end{aligned} \quad \leftarrow \text{tehát}$$

Hatványozás, gyökvonás trigonometrikus alakban:

$$[r(\cos \alpha + i \sin \alpha)]^n = r^n (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha))$$

$$\sqrt[n]{r(\cos \alpha + i \sin \alpha)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left[\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right] + i \sin \left[\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right] \right), \quad k=0, 1, \dots, n-1$$

↑
valós gyökvonás nemnegatív számból

akármilyen egész szám,
de pl. 0 és n ugyanazt a
gyököket generálja:
 $\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2 \cdot 0 \pi}{n} \right) = \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2 \cdot n \pi}{n} \right) - 2\pi$

Valóban:

$$\left[\sqrt[n]{r} \left(\cos \left[\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right] + i \sin \left[\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right] \right) \right]^n =$$

$$= (\sqrt[n]{r})^n (\cos[\alpha + 2k\pi] + i \sin[\alpha + 2k\pi]) = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

Megjegyzés: A $a+bi \leftrightarrow \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ megfeleltetés előgytermészetes, mivel ha azonosítjuk az $x+iy$ komplex számot az $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ valós $\mathbb{R}^2$ -beli vektorral, akkor

$$(a+bi)(x+iy) = (ax-by) + (ay+bx) \cdot i \longleftrightarrow \begin{bmatrix} ax-by \\ ay+bx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Megjegyzés: Az $aE + bI$, $I^2 = -E$ alakú mátrixok helyett vehetjük volna pl. ezeket:

① $a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = E$, ② $a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot E$, de az így

Kapott részalgebrákban nem csak az $a=b=0$ számokhoz hozzárendelt elem lenne neminvertálható:

① $a=1, b=1 \rightarrow 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

② $a=0, b=1 \rightarrow 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ nem létezik.

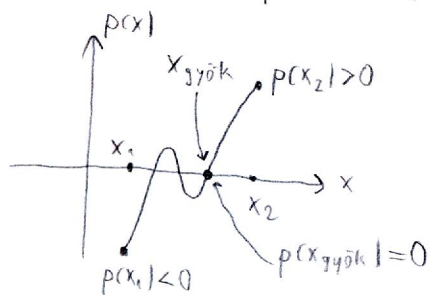
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$ nem létezik.

Algebra alaptétele (Gauss)

Minden $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ komplex együtthatós polinomnak létezik komplex gyöke.

Valós eset: Minden $p(x) = z^{2n+1} + a_{2n}z^{2n} + \dots + a_1z + a_0$ páratlan fokú valós polinomnak létezik valós gyöke.

Bizonyítás (vázlat): $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty$, így léteznek x_1, x_2 számok, hogy $p(x_1) < 0$, $p(x_2) > 0$. Továbbá $p(x)$ folytonos, így valamely $x_{gyök} \in (x_1, x_2)$ pontban p értéke nulla: $p(x_{gyök}) = 0$.



(Az az eredményt, hogy

$f(x)$ folytonos,

$f(x_1) < 0$

$f(x_2) > 0$,

$x_1 < x_2$

létezik $x_1 < x_{gyök} < x_2$,

$f(x_{gyök}) = 0$,

Bolzano tételének hívják)

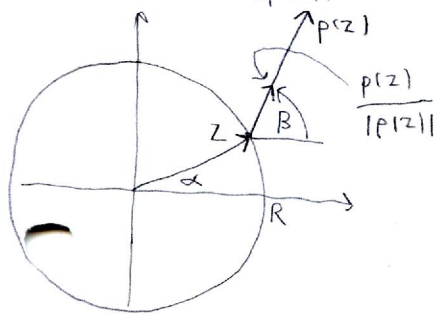
Komplex eset: Minden komplex polinomnak van komplex gyöke.

Bizonyítás (vázlat):

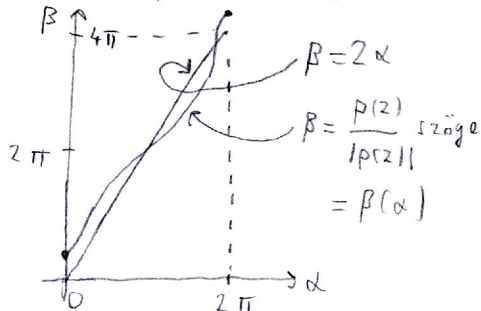
① Ha $|z|$ elég nagy, akkor $|z^n| \gg |a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0|$, tehát $p(z) \approx z^n$.

Legyen $z = R(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, ekkor $p(z) \approx z^n = R^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$,

$\frac{p(z)}{|p(z)|} = \cos(\beta) + i \sin(\beta) \approx \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)$, tehát $\beta \approx n\alpha$



pl. $n=2$, $p(z) = z^2 + a_1z + a_0$



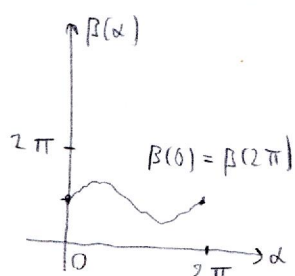
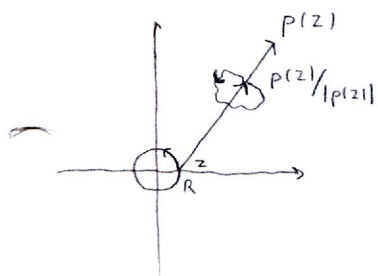
Indirekt bizonyítás:

Feltesszük, hogy a tétel nem igaz, és ebből ellentmondást kapunk, tehát a tétel IGAZ.

Tehát tegyük fel, hogy létezik $p(z)$, úgy hogy $p(z) \neq 0$ bármely $z \in \mathbb{C}$ -re.

Ha ennek (a nem létező) $p(z)$ polinomnak a fokszáma n , akkor, ha R elég nagy, akkor $\beta(2\pi) - \beta(0) = n \cdot 2\pi$. Most csökkentsük R -t, ekkor $\beta(\alpha)$ gráfja "folytonosan" fog változni, viszont ez azt jelenti, hogy $\beta(2\pi) - \beta(0)$ végig $n \cdot 2\pi$ marad, hiszen $\beta(2\pi) - \beta(0)$ több szöröse 2π -nek, a "folytonosság" viszont megtiltja, hogy $\beta(2\pi) - \beta(0)$ ugrásszerűen változzon.

(Ha $p(z)$ -nek van gyöke, akkor $p(z)/|p(z)|$ a gyöknél nincs értelmezve, a megfelelő R értékknél ugorhat $\beta(2\pi) - \beta(0)$.) Legyen most $R \approx 0$, az ábráink:



Itt $\beta(2\pi) - \beta(0) = 0$, ellentmondva annak, hogy:

① $\beta(2\pi) - \beta(0) = n \cdot 2\pi$, ha R elég nagy.

② $\beta(2\pi) - \beta(0)$ mindig 2π valahányszorosára,

③ $\beta(2\pi) - \beta(0)$ R folytonos függvénye.

Ellentmondást kaptunk $\Rightarrow$ a tétel IGAZ.