

Mennyi az $x = 1.1111\dots$ bináris szám?

Feladat 1.8: Ismételd meg az előző **Feladat**ot a megfelelő ábra lerajzolásával együtt, ha $1/2$ helyett $1/3$ áll!

Feladat 1.9: Magyarázd meg Akhilleusz és a teknős paradoxonját! Lásd itt:

https://hu.wikipedia.org/wiki/Z%C3%A9n%C3%B3n_paradoxonjai

2.0: Az (??) egyenlet megoldásánál használtuk azt, hogy a legnagyobb közös osztója 1540-nak és 26-nak 2:

$$\frac{1540}{26} = \frac{2 \cdot 770}{2 \cdot 13} = \frac{770}{13} \quad (10)$$

`legnagyobb_kozos_oszto(1540,26)=gcd(1540,26)`, `gcd`: greatest common divisor

Hogyan lehet $gcd(1540, 26) = 2$ -t kiszámolni (Euklidesz algoritmus):

1. **Feladat 2.1:** Győzd meg magad, hogy

$$\begin{aligned} gcd(1540, 26) &= gcd(1540 - 1 \cdot 26, 26) = gcd(1540 - 2 \cdot 26, 26) = \dots = gcd(1540 - 59 \cdot 26, 26) = gcd(6, 26) \\ &= gcd(6, 26 - 4 \cdot 6) = gcd(6, 2) \\ &= gcd(6 - 3 \cdot 2, 2) = gcd(0, 2) \\ &= 2 \end{aligned} \quad (11)$$

2. **Feladat 2.2:** Írj egy függvényt a kedvenc programozási nyelvedben, ami kiszámolja $gcd(m, n)$ -t! (Vagy keresd meg ezt a függvényt valamelyik komputer algebra rendszerben!)

Az első sorában (??)-nek a következő függvényeket használtuk:

$$\begin{aligned} 59 &= \lfloor 1540/26 \rfloor = \text{egeszresz}(1540/26) = \text{floor}(1540/26) = 59 = (\text{int})1540/(\text{int})26, \\ 6 &= 1540 \% 26 = \text{modulo}(1540, 26) = (1540 \text{ osztva } 26\text{-tal maradéka } 6) \end{aligned} \quad (12)$$

A **Feladat 2.1.** logikája:

$$\begin{aligned} gcd(\text{Nagy}, \text{Kicsi}) &= gcd(\text{Kicsi} \text{olIsKisebb}, \text{Kicsi}) \\ &= gcd(\text{Kicsi} \text{olIsKisebb}, \text{RettenetesenKicsi}) \\ &\quad \dots - > \dots \\ &= gcd(0, \text{valami}) \text{ vagy } gcd(\text{valami}, 0) \\ \implies gcd(\text{Nagy}, \text{Kicsi}) &= \text{valami} \end{aligned} \quad (13)$$

Ha ismered a rekurzív függvényeket, akkor (??) alapján meg tudod adni a gcd függvény egy kódját a kedvenc programozási nyelveden.

Feladat 2.3: Reprezentáljuk a $(0, 1)$ -béli racionális számokat p/q alakban, ahol p, q sztringek, amelyek a $0 \dots 9$ karakterekből állnak, és nem kezdődnek nullával.

- Hány ilyen 3,4, illetve 5 hosszúságú sztring létezik, ha nem követeljük meg, hogy a tört beleessen a $(0, 1)$ intervallumba? (Itt pl. 31/44 hossza 5.)
- Hány ilyen 3,4, illetve 5 hosszúságú sztring létezik, ha megköveteljük meg, hogy a tört beleessen a $(0, 1)$ intervallumba?
- Hány ilyen 3,4, illetve 5 hosszúságú sztring létezik, ha megköveteljük meg, hogy a tört beleessen a $(0, 1)$ intervallumba, továbbá azt is megköveteljük, hogy a törtet ne lehessen egyszerűsíteni (vagyis pl. 6/9 ne forduljon elő)? (Ezt elég sok munka lenne kiszámolni számítógép nélkül.)

Feladat 2.4: Rekonstruáld Cantor egyik híres eredményét:

A racionális számok hiánytalanul felsorolhatók, vagyis a számosságuk megszámlálható végtelen.

Ez azt jelenti, hogy $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{N}$ elemei párba állíthatóak.

Feladat 2.5: Vegyük a következő pszeudokódot:

```
x=1540
y=26
print x/y
```

Hogy kellene ezt módosítani a kedvenc programozási nyelveden, ha a következő outputokat szeretnénk megkapni:

$$59 \quad 770/13 \quad 59.230769230769230 \quad 5(9.23076)$$

3.0: Oldd meg:

$$(2 + 3\sqrt{2})x = 4 + 5\sqrt{2}. \quad (14)$$

Megoldás:

$$x = \frac{4 + 5\sqrt{2}}{2 + 3\sqrt{2}} = \frac{4 + 5\sqrt{2}}{2 + 3\sqrt{2}} \cdot \frac{2 - 3\sqrt{2}}{2 - 3\sqrt{2}} = \frac{-22 - 22\sqrt{2}}{-14} = \frac{11}{7} + \frac{1}{7}\sqrt{2}. \quad (15)$$

Feladat 3.1: Itt egy ügyes trükköt alkalmaztunk, ami eltüntette a $\sqrt{2}$ irracionális számot a nevezőből. Ha $2 + 3\sqrt{2}$ helyett valamilyen más $q_1 + q_2\sqrt{2}$, $q_{1,2} \in \mathbb{Q}$ nevező állt volna, akkor az eljárás működéséhez arra van szükségünk, hogy

$$\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}, \quad (q_1 + q_2\sqrt{2})(q_1 - q_2\sqrt{2}) = q_1^2 - 2q_2^2 \neq 0. \quad (16)$$

Magyarázd el, hogy miért van ez így, felhasználva azt a jólismert tételt, hogy bármely egynél nagyobb egész lényegében egyértelműen (vagyis a tényezők sorrendjétől eltekintve) felírható mint prímszámok szorzata.

Feladat 3.2: Tegyük fel, hogy nem ismerjük a (??) trükköt. Ekkor keressük a megoldást $x = u + v\sqrt{2}$ alakban, ahol $u, v \in \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned} (2 + 3\sqrt{2})(u + v\sqrt{2}) &= 4 + 5\sqrt{2}, \\ (2u + 3v \cdot 2) + (2v + 3u)\sqrt{2} &= 4 + 5\sqrt{2}, \\ 2u + 6v &= 4, \\ 3u + 2v &= 5. \end{aligned} \quad (17)$$

Oldd meg az utolsó két egyenletet és ellenőrizd, hogy valóban (??) a megoldás!

Feladat 3.3: Ismételd meg az előző **Feladat**okat, ha $\sqrt{2}$ helyett $\sqrt{3}$ áll!

Feladat 3.4: Próbáld megismételni az előző **Feladat**okat, ha $\sqrt{2}$ helyett $\sqrt[3]{2}$ áll! Milyen problémák merülnek fel?

Feladat 3.5: A 3.2 **Feladat** logikáját alkalmazva próbáld megkeresni azon $u, v, w \in \mathbb{Q}$ számokat, amelyek megoldják az

$$\left(2 + 3\sqrt[3]{2} + 4\left(\sqrt[3]{2}\right)^2\right)\left(u + v\sqrt[3]{2} + w\left(\sqrt[3]{2}\right)^2\right) = \left(5 + 6\sqrt[3]{2} + 7\left(\sqrt[3]{2}\right)^2\right) \quad (18)$$

egyenletet! Írd fel azt a racionális együtthatókat tartalmazó háromismeretlenes egyenletrendszert, amit az $u, v, w \in \mathbb{Q}$ kielégítenek, és ellenőrizd, hogy a megoldás

$$u = 46/29, \quad v = 4/29, \quad w = 7/58. \quad (19)$$

Feladat 3.6: Ezekben a feladatokban egzakt módon kezeltük az irracionális gyököket, ami valami olyasmit jelent, hogy pl. $\sqrt[3]{2}$ -re úgy gondoltunk, mint egy olyan k szimbólumra (k :köbgyök), amit úgy kezelünk, hogy ha meglátjuk k -t vagy k^2 -et valamilyen kifejezésben, akkor azt békén hagyjuk, viszont k^3 átírjuk 2-re. Hasonlóan $\sqrt{2}$ -re úgy gondoltunk, mint egy olyan n szimbólumra (n :négyzetgyök), amit úgy kezelünk, hogy ha meglátjuk n -et valamilyen kifejezésben, akkor azt békén hagyjuk, viszont n^2 átírjuk 2-re.

Írd át a 3.0, 1, 2, 5 feladatokat úgy, hogy helyettesítsd n, k -val $\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}$ -t! Próbáld elfelejtkezni arról, hogy ezek a szimbólumok létező valós számok, továbbá gondolj úgy rájuk, mint olyan változóra, amelyeknek megvannak a következő műveleti szabályai:

$$n^2 = 2, \quad k^3 = 2. \quad (20)$$

Feladat 3.7: Hasonló kibővítése a valós számoknak is értelmezhető, vehetjük például az

$$r_1 + r_2n, \quad r_{1,2} \in \mathbb{R}, \quad n^2 = 2 \quad (21)$$

alakú kifejezések halmazát. Hogy néz ki itt a szorzás, vagyis mennyi x, y ha

$$(r_1 + r_2n)(s_1 + s_2n) = x + yn. \quad (22)$$

Az osztás azonban ne mindig végezhető el itt. Keress olyan nem nulla r_1, r_2 valós számokat, hogy az

$$(r_1 + r_2n)(x + yn) = 1 + 0n = 1 \quad (23)$$

ne létezzen $x, y \in \mathbb{R}$ megoldása!

Feladat 3.8: (Ez a **Feladat** a komplex számoknak egy nem túl okos verzióját konstruálja meg.)

Vegyük az

$$r_1 + r_2j, \quad r_{1,2} \in \mathbb{R}, \quad j^2 = -1 + j \quad (24)$$

alakú kifejezések halmazát. Hogy néz ki itt a szorzás, vagyis mennyi x, y ha

$$(r_1 + r_2j)(s_1 + s_2j) = x + yj. \quad (25)$$

Lehet-e osztani az $r_1 + r_2j$ számokkal (leszámítva a $0 + 0j$ -t)? Vagyis igaz-e hogy az

$$(r_1 + r_2j)(x + yj) = 1 + 0j = 1 \quad (26)$$

egyenlet mindig megoldható x, y -ra (leszámítva a $r_1 = 0, r_2 = 0$ esetet) ?

Feladat 4.1.: Véges testek, $\mathbb{F}_5$.

Az egészek koreben az osztást nem mindig tudjuk elvégezni, pl. $13/4$ nem egész szám. Viszont ha csak azzal törődünk, hogy a szereplő számoknak mennyi a pl. 5-tel történő osztási maradéka, akkor

$$13 \sim 13 - 2 \cdot 5 = 3 = \text{mod}(13, 5) = 13 \% 5 \sim 3'$$

$$3'/4' = 2', \quad \text{mivel:} \quad (\text{osztando}) = (\text{hanyados})(\text{osztó}) = 2 \cdot 4 = 8 = 3 + 1 \cdot 5 \sim 3' = 2' \cdot 4'$$

Számold ki, hogy mennyi

$$1'/1', \quad 1'/2', \quad 1'/3', \quad 1'/4',$$

vagyis keress olyan számokat a $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ halmazban, hogy ha pl. amikor $1'/3'$ -ot számoljuk ki, akkor egy olyan x számra van szükségünk, amire teljesül az, hogy

$$\text{mod}(x \cdot 3, 5) = 1, \quad \text{vagyis:} \quad x = 2, \quad \implies \quad 1'/3' = 2'$$

Tehát $\mathbb{F}_5$ műveleti táblázatai (itt mar pl. $2'$ helyett 2 -t írunk):

+	0	1	2	3	4		*	0	1	2	3	4		x	1/x
0	0	1	2	3	4		0	0	0	0	0	0		1	1
1	1	2	3	4	0		1	0	1	2	3	4		2	3
2	2	3	4	0	1		2	0	2	4	1	3		3	2
3	3	4	0	1	2		3	0	3	1	4	2		4	4
4	4	0	1	2	3		4	0	4	3	2	1			

Feladat 4.2.: Írj fel hasonló táblázatokat

1. $\mathbb{F}_2$ -re, vagyis a $\{0, 1\}$ kettes osztási maradékok,
2. $\mathbb{F}_3$ -ra, vagyis a $\{0, 1, 2\}$ hármas osztási maradékok

eseteire.

Feladat 4.3.: Próbáld ugyanezt megismételni $\mathbb{Z}_4 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ -re, vagyis a $\{0, 1, 2, 3\}$ négyes osztási maradékokra is! A $+, *$ táblázatokkal nem lesz semmi probléma, viszont az utolsó, $x, 1/x$ táblázat kitöltése problémás lehet. Miért?

Feladat 4.4.: Tehát $\mathbb{Z}_4 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ nem test, mivel nem lehet (a nullat leszámítva) bármely elemével osztani. Ettől függetlenül létezik a negyelemu $\mathbb{F}_4$ test, amely a Feladat 3.6. mintájára konstruálható meg. Ott a racionális számok $\mathbb{Q}$ testehez hozadtunk egy olyan n szimbolumot, amelytől azt akartuk, hogy elégítsen ki egy olyan másodfoku $n^2 - 2 = 0$ egyenletet, amelynek nincs racionális megoldása.

- Keress meg az olyan másodfoku

$$\theta^2 + f_1\theta + f_2 = 0, \quad f_{1,2} \in \{0, 1\}$$

egyenleteket, amelyeknek nincs megoldása $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ -ben!

- Vegy egy ilyen egyenletet, es legyen θ muveleti szabalya

$$\theta^2 = -f_1\theta - f_2 = f_1\theta + f_2.$$

($\mathbb{F}_2$ -ben $-1 = 1$, hiszen $1 + (-1) = 1 + 1 = 0$)

- Ekkor $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \theta, \theta + 1\}$ mint halmaz. Írd fel ezen elemek összeadási és szorzási táblázatát, használva a $\theta' = \theta + 1$ jelölést!
- Számold ki a θ, θ' elemek inverzeit! Ha ez sikerült, akkor megkonstruáltad az $\mathbb{F}_4$ negyelemu veges testet.

2 Szimbolikus algebra rendszerek

Feladat 5.1: Keres rá a neten arra, hogy

- Computer algebra systems, CAS,
- Mathematica, Matlab,
- Sage, Octave, (Mathics: részleges Mathematica klón)
- SymPy, NumPy, matplotlib, <https://colab.google/>
- Basic Linear Algebra Subprograms (BLAS),
Linear Algebra Package (LAPACK)

Feladat 5.2: Olvasd el és próbáld értelmezni a következő, egyenletrendszereket megoldó kódokat:

Mathics, (Mathematica klón)

Mathics3 in Django

http://localhost:8000/Mathics3 in Django

http://localhost:8000/



Mathics



?

```
Solve[{1 x + 1 y == 3, 2 x + 4 y == 10}, {x, y}]
```

$$\{\{x \rightarrow 1, y \rightarrow 2\}\}$$

```
Solve[{1 x + 1 y == 3, 4 x + 4 y == 12}, {x, y}]
```

```
Solve[{1 x + 1 y == 3, 4 x + 4 y == 13}, {x, y}]
```

```
Solve::svars:
Equations may not give solutions for all "solve" variables.
```

$$\{\{x \rightarrow 3 - y\}\}$$

$$\{\}$$

```
A = {{1, 1}, {2, 4}}
Ai = Inverse[A]
MatrixForm[Ai]
b = {3, 10}
sol = Ai.b
RowReduce[{{1, 1, 3}, {2, 4, 10}}]
```

$$\begin{aligned} & \{\{1, 1\}, \{2, 4\}\} \\ & \left\{ \left\{ 2, -\frac{1}{2} \right\}, \left\{ -1, \frac{1}{2} \right\} \right\} \\ & \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ & \{3, 10\} \\ & \{1, 2\} \\ & \{\{1, 0, 1\}, \{0, 1, 2\}\} \end{aligned}$$

```
A2 = {{1, 1}, {4, 4}}
Det[A2]
A2b = {{1, 1, 3}, {4, 4, 12}}
rrA2b = RowReduce[A2b];
MatrixForm[rrA2b]
```

$$\begin{aligned} & \{\{1, 1\}, \{4, 4\}\} \\ & 0 \\ & \{\{1, 1, 3\}, \{4, 4, 12\}\} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

```
A3b = {{1, 1, 3}, {4, 4, 13}}
rrA3b = RowReduce[A3b]
MatrixForm[rrA3b]
```

$$\begin{aligned} & \{\{1, 1, 3\}, \{4, 4, 13\}\} \\ & \{\{1, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}\} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1 of 2

9/15/25, 10:502 of 2

9/15/25, 10:50

6

Octave:

```
##### linalg1octave.m #####
##### szimbolikus megoldas: (ez egy megjegyzes) #####
pkg load symbolic
syms x y
[ xsol, ysol ] = solve( 1*x+1*y==3, 2*x+4*y==10 , x, y )
# Eredmeny:
# xsol = (sym) 1
# ysol = (sym) 2
[ xsol, ysol ] = solve( 1*x+1*y==3, 4*x+4*y==12 , x, y )
# Eredmeny:
# xsol = (sym) 3 - y
# ysol = (sym) y
#####

##### numerikus megoldas: #####
# Egyetlen megoldas letezik:
A = [ 1, 1; 2, 4 ];
# sorvegi ";" -> nincs output, A=[1 1;2 4] szinten helyes,
# viszont [[1,1],[2,4]] nem mukodne mint matrix
b = [ 3; 10 ];
iA = inv(A)
sol = iA * b
# Eredmeny:
# iA = [ 2.0000 -0.5000; -1.0000 0.5000 ]
# sol = [ 1; 2 ]

# Vegtelen sok megoldas letezik:
A2 = [ 1 1; 4 4 ];
b2 = [ 3; 12 ];
dA2 = det(A2)
Ab2 = [ 1, 1, 3; 4, 4, 12 ];
# reduced row echelon form of A2, Redukalt (sor) lepcsos alak
rA2 = rref(Ab2)
# Eredmeny:
# dA2 = 0 # tehat A2 nem invertalhato, nincs egyertelmu megoldas
# rA2 = [ 1 1 3; 0 0 0 ] # tehat 1*x + 1*y = 3, x = 3-y

# Nincs megoldas:
Ab3 = [ 1, 1, 3; 4, 4, 13 ]
rA3 = rref(Ab3)
# Eredmeny:
# rA3 = [ 1 1 0; 0 0 1 ]
# tehat a masodik 0 0 1 sor alapjan: 0*x+0*y = 1, nincs megoldas
```

Sympy, Numpy (Python package)

```
import sympy
# (ez egy megjegyzes, kommentar)
from sympy import *

s4=sqrt(4)
s2=sqrt(2)
s2f=s2.evalf()
print('sympy: sqrt 4:', s4, ' sqrt 2:', s2,s2f)
rat_26_14 = Rational(26, 14)
rat_13_7 = Rational(13, 7)
print('sympy: 26/14:',rat_26_14, ' sympy: 13/7:',rat_13_7, rat_13_7.evalf())
##### output #####
# sympy: sqrt 4: 2 sqrt 2: sqrt(2) 1.41421356237310
# sympy: 26/14: 13/7 sympy: 13/7: 13/7 1.85714285714286

# Oldd meg:
# 1*x+1*y=3
# 2*x+4*y=10
x,y = symbols("x, y")
solution = solve([Eq(1*x + 1*y, 3),Eq(2*x + 4*y, 10)], [x, y])
print(solution, solution.get(x), solution.get(y))
##### output: {x: 1, y: 2} 1 2

# Oldd meg:
# 1*x+1*y=3
# 4*x+4*y=12
x,y = symbols("x,y")
solution = solve([Eq(1*x + 1*y, 3), Eq(4*x + 4*y, 12)], [x,y])
print(solution, solution.get(x), solution.get(y))
##### output: {x: 3 - y} 3 - y None

# Oldd meg:
# 1*x+1*y=3
# 2*x+4*y=10
mat = Matrix([[1, 1], [2, 4]])
vec = Matrix([[x], [y]])
rhs = Matrix([[3], [10]])

inverse_mat = mat.inv()
solution = inverse_mat*rhs
print(mat, vec)
print('sympy inv:', inverse_mat, ' sympy megoldas: ',solution)
# "numpy" numerikus megoldas:
import numpy
mat_n = numpy.array(mat).astype(numpy.float32)
rhs_n = numpy.array(rhs).astype(numpy.float32)
inverse_mat_n = numpy.linalg.inv(mat_n)
solution_n = inverse_mat_n*rhs
print('numpy inv:', inverse_mat_n, ' numpy megoldas: ',solution_n)
##### output #####
# Matrix([[1, 1], [2, 4]]) Matrix([[x], [y]])
# sympy inv: Matrix([[2, -1/2], [-1, 1/2]])
# sympy megoldas: Matrix([[1], [2]])
# numpy inv: [[ 2. -0.5], [-1. 0.5]]
# numpy megoldas: Matrix([[1.00000], [2.00000]])

# Oldd meg:
# 1*x+1*y=3
# 4*x+4*y=12
mat = Matrix([[1, 1], [4, 4]])
mat_det = mat.det()
print('if det=0 -> not invertible, det =', mat_det)
mat_rhs = Matrix([[1, 1, 3], [4, 4, 12]])
solution = mat_rhs.rref()
```

```

# rref: Row Reduced Echelon Form
#   Megjegyzes: "rref" NINCS benne a numerikus "numpy" csomagban
#   az eljárás numerikus instabilitása miatt
print("jobboldal: (3,12), Redukált lépcsős alak: ",solution)
mat_rhs = Matrix([[1, 1, 3], [4, 4, 12]])
solution = mat_rhs.rref()
print("jobboldal: (3,13), Redukált lépcsős alak: ",solution)
##### output #####
#   if det=0 -> not invertible,   det = 0
#   jobboldal: (3,12), Redukált lépcsős alak:   (Matrix([
#     [1, 1, 3],
#     [0, 0, 0]]) , (0,))
#   jobboldal: (3,13), Redukált lépcsős alak:   (Matrix([
#     [1, 1, 3],
#     [0, 0, 0]]) , (0,))

# Es most valami egészen más: Mat.Anal. 1.2.3 \vspace{5pt}{\bf{Feladat}}:
a = solve(abs(x-1)<=2,x)
A = a.as_set()           # [-1,3]
B = Interval.Lopen(2, 6) # ]2,6]
C = Interval.Ropen(-4, 7) # [-4,7[
print('a: ',a)
print('A: ',A, ' B: ',B, ' C: ',C)
# Feladat: Micsoda  $X = [(A \cup B) \setminus C] \cup [C \setminus (A \cap B)]$  ?
AuBmC = Complement(Union(A, B), C)
CmAnB = Complement(C, Intersection(A, B))
X = Union(AuBmC, CmAnB)
print('AuBmC:', AuBmC, ' CmAnB:', CmAnB)
print('X:', X)
print('A es B szimmetrikus differenciaja: ', SymmetricDifference(A,B))
##### output #####
#   a:  (-1 <= x) & (x <= 3)
#   A:  Interval(-1, 3)   B:  Interval.Lopen(2, 6)   C:  Interval.Ropen(-4, 7)
#   AuBmC: EmptySet   CmAnB: Union(Interval(-4, 2), Interval.open(3, 7))
#   X: Union(Interval(-4, 2), Interval.open(3, 7))
#   A es B szimmetrikus differenciaja:  Union(Interval(-1, 2), Interval.Lopen(3, 6))

```

Feladat 5.3: Próbáld meg kinyomozni, hogy a Mat.Anal.I. és a Lin.Alg. kurzusok ZH-jaiból mely Feladatok oldhatóak meg hasonló módon, használva valamelyik Komp.Alg. rendszert!

Feladat 5.4: Próbáld meg kinyomozni, hogy a Mat.Anal.I. és a Lin.Alg. kurzusok ZH-jaiból mely Feladatok oldhatóak meg felhasználva valamelyik MI (Mesterséges Intelligencia) rendszert!

LAPACK (Intel implementáció: oneMKL, oneMath.Kernel.Library)

```
/* Itt kezdődik egy megjegyzés
Fordítsd le (compile):
icpx -fsycl -lmkl_sycl -lmkl_intel_ilp64 \
-lmkl_sequential -lmkl_core "filename".cpp
Futtasd (run):
./a.out N // N a matrix merete, pl. 1000
Valami hasonló egy kisse professzionálisabban:
https://github.com/olutosinbanjo/oneMKL\_getrs/blob/main/src/getrs\_usm.cpp
*/

#include <sycl/sycl.hpp>
#include <oneapi/mkl.hpp>
#include <iostream>
#include <math.h>

int main(int argc, char *argv[])
{
    // memoria allokacio:
    std::int64_t N = (int64_t)atoi(argv[1]);
    sycl::queue q(sycl::gpu_selector_v);
    float *a = sycl::malloc_shared<float>(N * N, q);
    float *b = sycl::malloc_shared<float>(N, q);
    std::int64_t *ipiv = sycl::malloc_shared<std::int64_t>(N, q);
    float *scratchpad = sycl::malloc_shared<float>(N * N, q);

    // inicializacio:
    for (int i = 0; i < N; i++)
    {
        float bi = 0.0f;
        for (int j = 0; j < N; j++)
        {
            a[i * N + j] = cosf32((float)(i * j + 1));
            bi += a[i * N + j] * j; // vagyis a megoldas: x[i]=i
        }
        b[i] = bi;
    }

    ////////// itt tortenik az aktualis szamolas: //////////
    // getrf: a = L U, getrs: L U x = b, x felulirja b-t.
    oneapi::mkl::lapack::getrf(q, N, N, a, N, ipiv, scratchpad, N * N).wait();
    oneapi::mkl::lapack::getrs(q, oneapi::mkl::transpose::trans,
                                N, 1, a, N, ipiv, b, N, scratchpad, N * N).wait();
    //////////////////////////////////////

    std::cout << "x0: " << b[0] << " x" << N / 2 << ": "
                << b[N / 2] << std::endl;
    sycl::free(a, q);
    sycl::free(b, q);
    sycl::free(ipiv, q);
    sycl::free(scratchpad, q);
    return 0;
}
/*
output: Numerikus instabilitas: a helyes megoldas: x[i]=i
N=200, x[0]: -0.00390625 x[100]: 100
N=500, x[0]: -0.015625, x[250]: 249.999
N=1500, x[0]: 26.125, x[750]: 772.643
N=3500, x[0]: 26782.2 x[1750]: 22648.1
*/
```

Feladat 5.5: Ez a program az a mátrixot mint egy $N \times N$ méretű egydimenziós tömböt adja át a *getrf*, *getrs* függvényeknek. Így az $a_{i,j}$ elemre mint $a[i * N + j]$ hivatkozik. Hogyan lehet visszanyerni $i * N + j$ értékéből az (i, j) part?

- Írj olyan függvényeket, amelyek átszámolnak az egy, illetve a kétdimenziós indexek között egy $m \times n$ méretű mátrix esetében! Pl. legyen $m = 3, n = 4$, ekkor a kétfelé indexálás:

$$\begin{pmatrix} 00 & 01 & 02 & 03 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \\ 20 & 21 & 22 & 23 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}.$$

Vagyis olyan függvényekre lenne szükségünk, hogy pl.

$$KettobolEgybe(2, 2, 3, 4) = 10, \quad EgybolKettobe(9, 3, 4) = (2, 1)$$

Lehetőleg csak az egészek egész eredményű osztását, illetve a *modulo* (általában %-kal jelölt) függvényt használd!

- Ismételd meg ugyanezt arra az esetre, amikor az indexálás nem a 0-nal, hanem az 1-nel kezdődik!
- Ismételd meg a feladatot három dimenziós tömbökre is!

Feladat 5.6: Írj fel egy 5×5 méretű mátrixot nem nulla elemekkel, és keresd meg az inverzet számítógép segítségével! Vegezd ezt el tizedesttört, illetve racionális matrixelemek eseteire is!

2025. Beadható feladatok lineáris algebrából, II.

3 Lineáris egyenletek: két ismeretlen

Feladat 2.1: Oldd meg:

$$\begin{aligned} I : \quad 2x + 3y &= 4 \\ II : \quad 5x + 6y &= 7. \end{aligned} \tag{27}$$

- Számold ki, hogy mennyi

$$2 \cdot II - 5 \cdot I.$$

Oldd meg a kapott egyenletet y -ra! Ne végezd el a felmerülő szorzásokat, vagyis p. a jobb oldalt hagyd az $2 \cdot 7 - 5 \cdot 4$ alakban! Az y megoldást is próbáld a következ formában felírni:

$$y = \frac{? \cdot ? - ? \cdot ?}{? \cdot ? - ? \cdot ?},$$

ahol a kérdőjelek helyen az (1) -be n előforduló számok állnak.

- Mennyi x ? Lehetőleg találj ki a megoldást az y -ra vonatkozó képlet segítségével, további számolások nélkül!
- Használva a 2×2 determinánsok

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

definícióját, írd fel az eredményt a következő alakba:

$$x = \frac{\det(??)}{\det(??)}, \quad y = \frac{\det(??)}{\det(??)}.$$

Lehetőleg a nevezők ugyanazok legyenek. A dupla kérdőjelek itt 2×2 táblázatokat reprezentálnak.

Feladat 2.2: Ismételd meg az előző feladatot az általános

$$\begin{aligned} I : \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ II : \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \tag{28}$$

egyenletre, elfogadva, hogy nem ütközünk a nullával való osztás problémájába! Ha ez sikerült, akkor felfedezted Cramer szabályának egy esetet!

Ez alapján számold ki, hogy mennyi

$$\begin{pmatrix} a_{inv11} & a_{inv12} \\ a_{inv21} & a_{inv22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1},$$

vagyis írd fel a következő egyenlet megoldását az a_{inv} ismeretlenekre!

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{inv11} & a_{inv12} \\ a_{inv21} & a_{inv22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

vagy

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{inv11} \\ a_{inv21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{inv12} \\ a_{inv22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Feladat 2.3: Ismételd meg az 2.1. feladatot a következő háromismeretlenes egyenletrendszerekre:

$$I : \quad 1x + 2y + 3z = 11 \tag{29}$$

$$II : \quad 4x + 5y + 6z = 12$$

$$III : \quad 7x + 8y + 10z = 13$$

$$I : \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \tag{30}$$

$$II : \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$III : \quad a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_2$$

Segítség: Számold ki:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 7 \cdot II - 4 \cdot 7 \cdot I \\ 1 \cdot 4 \cdot III - 4 \cdot 7 \cdot I \end{aligned}$$

Ekkor mar csak két ismeretlen marad, amelyek megoldása megkapható az előző feladat eredményébe történő behelyettesítéssel.

A Feladat 2.2-ben kapott megoldása (2)-nek tökéletes abban az értelemben, hogy ha van egyértelmű megoldás, akkor azt visszaadja a kapott képlet, ha ellenben nincs vagy nem egyértelmű a megoldás, azt a nullával való osztás jelzi. Igaz-e ugyanez az ebben a feladatban kapott megoldásra is? Ha nem, akkor hogyan lehetne orvosolni a problémát?

Feladat 2.4: Ismételd meg az előző feladatot négy és öt ismeretlenes egyenletrendszerekre is! (Ezt a feladatot persze egy pillanatig sem gondoltam komolyan, de ha így sikerült kifejlesztened egy helyes megoldóképletet az ötismeretlenes egyenletrendszerekre, akkor lefőzted a híres Seki Takakazu nevű japán tudóst.)

Feladat 2.5: A következő egyenletrendszer

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7, \\ \sqrt{2} \cdot 2x + \sqrt{2} \cdot 3y &= \sqrt{2} \cdot 7 \end{aligned} \quad (31)$$

megoldása nyilván $y = 7/3 - 2/3 \cdot x$. A következő egyenletrendszerben

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7, \\ a_2x + b_3y &= c_7 \end{aligned} \quad (32)$$

legyen (a_2, b_3, c_7) numerikus approximációja $(\sqrt{2} \cdot 2, \sqrt{2} \cdot 3, \sqrt{2} \cdot 7)$ -nek. (Itt a végtelen tizedestörték első néhány jegyet használtuk közelítésként.) Ezen közelítő egyenletrendszerek egzakt megoldása:

a_2	b_3	c_7	x	y
2.8	4.2	9.9	x	y
2.82	4.24	9.89	0.5	2.
2.828	4.242	9.899	—	—
2.8284	4.2426	9.8994	x	y
2.82842	4.24264	9.89949	0.5	2.
2.828427	4.242640	9.899494	2.	1.
2.8284271	4.2426406	9.8994949	5.	—1.
2.82842712	4.24264068	9.89949493	—	—

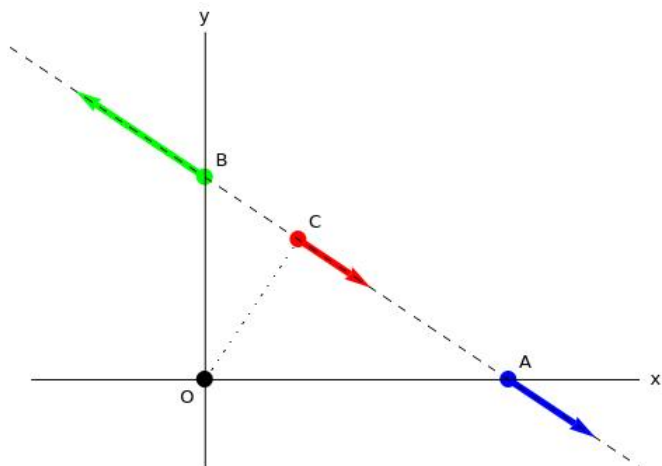
(33)

(Itt az utolsó két oszlopban "—" jelentése: nincs megoldás, míg "x y" azt jelenti, hogy az eredeti egyenlet egzakt megoldását kapjuk.)

- Rajzold le az (5) által megadott egyeneseket!
- Hogyan változik ez az ábra, ha (6) egyenletrendszernek az (7)-ben megadott megoldásait tekintjük?
- Gondolkozz el azon, hogy mi lehetne (5) megoldásának a "legesszerűbb" numerikus reprezentációja? Néhány javaslat az $(x, y)^T$ megoldásvektorokra :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 7/3 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} -1 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7/2 \\ 0 \end{pmatrix} - y \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 14/13 \\ 21/13 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3/\sqrt{13} \\ -2\sqrt{13} \end{pmatrix}.$$

"Keresd meg" ezeket a megoldásokat a következő ábrán, ahol a szaggatott vonal a $2x + 3y = 7$ egyenest jelöli:



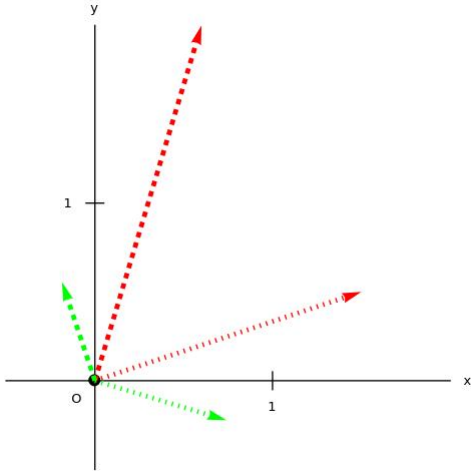
Feladat 2.6: Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 3/5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\vec{a}_1^s - \\ -\vec{a}_2^s - \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 20/27 & -5/27 \\ -2/9 & 5/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ \vec{a}_1^o & \vec{a}_2^o \\ | & | \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} -\vec{a}_1^s - \\ -\vec{a}_2^s - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | \\ \vec{a}_1^o & \vec{a}_2^o \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \quad (34)$$

Most rajzoljuk le az itt előforduló vektorokat:



- Mit figyelhetünk meg ezen az ábrán a piros $\vec{a}_k^s$ sorvektorok és zöld $\vec{a}_k^o$ oszlopvektorok közbezárt szögeiről és skalárszorzatairól? (Segítség: Mit mond erről (8) ?)
- Általában jobban szeretjük A -t oszlopvektorokra felbontani. Ismételd meg az eddigieket (ábrával együtt) akkor, ha A -t sorvektorokra, A^{-1} -t oszlopvektorokra bontjuk, illetve az inverzet az $A^{-1}A = E$ egyenlettel definiáljuk!

Feladat 2.7: Az előző feladatban az inverz kiszámításához olyan vektorok kellettek, amelyek merőlegesek voltak az eredeti mátrix vektoraira. A vektorilais szorzás két vektorból generál egy harmadikat, amelyik merőleges az eredeti két vektorra. Ennek alapján egy 3×3 mátrix A^{-1} inverzére az első $\widetilde{A}i$ (nem egészen helyes) tippünk ez lehetne:

$$E = A^{-1}A \quad \sim \quad \widetilde{E} = \widetilde{A}i A = \begin{pmatrix} -(\vec{b} \times \vec{c}) - \\ -(\vec{a} \times \vec{c}) - \\ -(\vec{a} \times \vec{b}) - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

- Most $\widetilde{E}$ elemi ilyesmik lesznek:

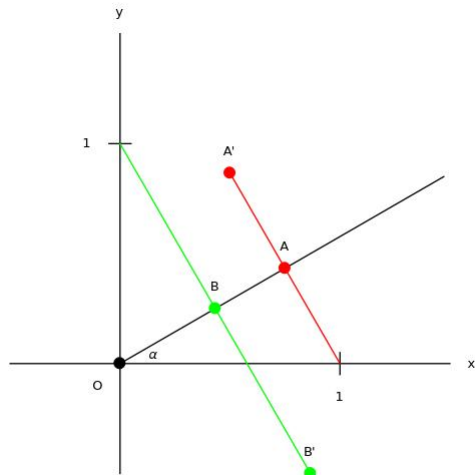
$$\widetilde{E}_{11} = (\vec{b} \times \vec{c})\vec{a} = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}), \quad \widetilde{E}_{22} = (\vec{a} \times \vec{c})\vec{b} = (\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}), \quad \widetilde{E}_{13} = (\vec{b} \times \vec{c})\vec{c} = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{c}) = 0.$$

Emlékezz vissza a vegyes vagy hármas szorzat efféle tulajdonságaira:

$$(\vec{b} \times \vec{c})\vec{a} = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = -(\vec{c} \times \vec{b})\vec{a} = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}), \quad (\vec{b}, \vec{c}, \vec{b}) = 0.$$

- Módosítsd $\widetilde{A}i$ -t úgy, hogy az $\widetilde{A}i \cdot A$ szorzat az egységmátrix legyen!

Feladat 2.8: Számold ki elemi trigonometria segítségével az origón átmenő α szögű egyenesre való merőleges vetítés P és tükrözés T mátrixait!



- Mennyi az $|\overline{OA}|$ távolság?
- Mik A koordinátái?
- Mi lesz P első oszlopa?
- Mik A' koordinátái?
- Mi lesz T első oszlopa?

Válaszd meg az analóg kérdéseket B, B' -re, illetve P, T második oszlopara!

Hasonlítsd össze az eredményt a

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad P = \vec{n} \vec{n}^T, \quad T = 2P - E$$

képletekkel!

Feladat 2.9: Keresd meg a $2x + 3y = 7$ egyenesre való merőleges vetítés és tükrözés transzformációinak a hatását az $A = (13, 11)^T$ pontra!

Segítség:

- Keresd egy pontot az egyenesen, majd told oda a koordinátarendszer origóját! Mi lesz A pozíciója az új koordinátarendszerben?
- Mennyi az egyenes és az új (vagy régi, ez itt mindegy) koordinátarendszer tengelyeivel bezárt szög koszinusza és szinusza?
- Alkalmazd az előző feladat eredményét az új koordinátarendszerben már az origón átmenő egyenesre való merőleges vetítés és tükrözés transzformációira!
- Told vissza a koordinátarendszer origóját az eredeti origóba, így ezt alkalmazva A -ra megkaptad a feladat végeredményeit!