

Név:

1. (2+3+2+3 pont) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Keress meg A sajátértékeit!

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 3 \cdot 3 = \lambda^2 - 6\lambda = \lambda(\lambda - 6)$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 6$$

Keress meg A sajátvektorait!

$$\lambda_1 = 0:$$

$$\begin{bmatrix} 3-0 & 3 \\ 3 & 3-0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$3x + 3y = 0 \rightarrow y = -x$$

$$\text{sajátaltér: } \left\{ \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix} \right\}, \text{ sajátvektor: } \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 6$$

$$\begin{bmatrix} 3-6 & 3 \\ 3 & 3-6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-3x + 3y = 0 \rightarrow x = y$$

$$\text{sajátaltér: } \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \right\}, \text{ sajátvektor: } \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mennyi $A^{13} (6, 8)^T$?

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 6 = \alpha + \beta \\ 8 = -\alpha + \beta \end{cases} \rightarrow \alpha = -1, \beta = 7$$

$$\begin{aligned} A^{13} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} &= A^{13} \left((-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 7 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = (-1) \cdot A^{13} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 7 \cdot A^{13} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= (-1) \cdot 0^{13} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 7 \cdot 6^{13} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6^{13} \cdot 7 \\ 6^{13} \cdot 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mennyi A^{13} ?

$$A^{13} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{-1} & \boxed{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0^{13} & 0 \\ 0 & 6^{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \lambda_1 \quad \lambda_2$

Megjegyzés:

$$\textcircled{1} A^{13} = \frac{1}{2} 6^{13} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{2} A \text{ szimmetrikus, valós, így } \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2.$$

Ortogonalis mátrixokra $O^{-1} = O^T$,
 így $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$

vagyis

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(5+(2+1)+2 pont)

4.A Oldd meg pivotálással a következő egyenletrendszert! Adj meg egy partikularis megoldást! Adj meg egy bázisát a homogén egyenlet megoldásainak! Írd fel az általános megoldást!

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & b \\ \hline e_1 & 6 & 4 & -6 & 8 & 2 & 2 \\ e_2 & 3 & 2 & -3 & 4 & 1 & 1 \\ e_3 & -6 & -4 & 6 & -8 & -2 & -2 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & 3 & 2 & -3 & 4 & 1 & 1 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

part. megold: $\vec{b} = 0\vec{e}_1 + 1\vec{a}_5 + 0\vec{e}_3 =$
 $= 0\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 + 0\vec{a}_3 + 0\vec{a}_4 + 1\vec{a}_5$

tehát $\vec{x}_{\text{part}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Alt. megold: $\vec{x}_{\text{alt}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t_{a_1} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + t_{a_2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t_{a_3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + t_{a_4} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 8x_4 + 2x_5 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 + x_5 &= 1 \\ -6x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 8x_4 - 2x_5 &= -2. \end{aligned}$$

hom. megold. a_1 oszlop: $\vec{a}_1 = 0\vec{e}_1 + 3\vec{a}_5 + 0\vec{e}_3 \rightarrow$
 $\rightarrow -1\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 + 0\vec{a}_3 + 0\vec{a}_4 + 3\vec{a}_5 = \vec{0}$

tehát $\vec{x}_{\text{hom}, a_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$. Hasonlóan $\vec{x}_{\text{hom}, a_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

továbbá $\vec{x}_{\text{hom}, a_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_{\text{hom}, a_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

4.B

1. Legyen $x_0 = 10$, $x_{n+1} = 2 - 2x_n$. Mennyi x_n ?

$$x_{\text{fix}} = 2 - 2x_{\text{fix}} \rightarrow x_{\text{fix}} = 2/3$$

$$x_n = (-2)^n \left(10 - \frac{2}{3} \right) + \frac{2}{3}$$

2. Legyen $x_0 = 10$, $x_{n+1} = 2 - x_n$. Mennyi x_n ?

$$x_{\text{fix}} = 2 - x_{\text{fix}} \rightarrow x_{\text{fix}} = 1$$

$$x_n = (-1)^n (10 - 1) + 1$$

$$x_{0,1,2,\dots} = 10, -8, 10, -8, \dots$$

4.C

Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Keresd meg A sajátértékeit és sajátvektorait!

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 0 \cdot 3 \rightarrow \lambda_1 = 3$$

$$(A - \lambda_1 E) \vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 3-3 & 0 \\ 3 & 3-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow 3x + 0y = 0 \rightarrow x = 0$$

sajátérték: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$, sajátvektor: $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. (6+4 pont)

a) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Keresd meg A sajátértékeit!

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 \cdot (-1) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = 1 \pm \sqrt{-1}, \quad \text{vagyis} \quad \lambda_1 = 1+i, \quad \lambda_2 = 1-i = \bar{\lambda}_1$$

Keresd meg A sajátvektorait!

$$\lambda_1 = 1+i$$

$$\begin{bmatrix} 1-(1+i) & 1 \\ -1 & 1-(1+i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-ix + y = 0 \rightarrow y = ix$$

$$\text{sajátaltér: } \left\{ \begin{bmatrix} x \\ ix \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{C} \right\}, \quad \vec{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = 1-i$$

Mivel A valós mátrix, $\vec{V}_2$ választható $\vec{V}_1$ komplex konjugáltjaként!

$$\vec{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

Fejzd ki a $(2, 3)^T$ vektort a sajátvektorok lineáris kombinációjaként! Mennyi $A^4(2, 3)^T$?

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = 2 \\ i\alpha - i\beta = 3 \\ -\alpha + \beta = 3i \end{array} \right\} \quad \beta = \frac{2+3i}{2} = 1 + \frac{3}{2}i \rightarrow \alpha = 1 - \frac{3}{2}i \quad \left| \quad A^4 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = (1+i)^4 \cdot (1 - \frac{3}{2}i) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + (1-i)^4 \cdot (1 + \frac{3}{2}i) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \right.$$

b) Legyen

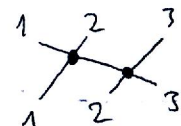
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Számold ki A determinansát pivotálás segítségével!

	a_1	a_2	a_3
e_1	3	2	1
e_2	5	2	4
e_3	5	3	2
a_3	3	2	1
e_2	-7	-6	0
e_3	-1	-1	0
a_3	1	0	1
e_2	-1	0	0
a_2	1	1	0
a_3	0	0	1
a_1	1	0	0
a_2	0	1	0

$$\det A \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{-1} \cdot \frac{1}{-1} = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}: \quad a \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{permutáció}$$

páros:  (két metszéspont),

$$\text{így } \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 1.$$

Vagyis

$$\det A = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 1 = 1$$

a_1	1	0	0
a_2	0	1	0
a_3	0	0	1

2. (6+4 pont) a) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Számold ki pivotálással (vagy maskeppen) A inverzet! Ellenorizd az eredményed!

	a_1	a_2	a_3	e_1	e_2	e_3
e_1	3	2	1	1	0	0
e_2	5	2	4	0	1	0
e_3	5	3	2	0	0	1
a_3	3	2	1	1	0	0
e_2	-7	-6	0	-4	1	0
e_3	-1	-1	0	-2	0	1
a_3	1	0	1	-3	0	2
e_2	-1	0	0	8	1	-6
a_2	1	1	0	2	0	-1
a_3	0	0	1	5	1	-4
a_1	1	0	0	-8	-1	6
a_2	0	1	0	10	1	-7
a_1	1	0	0	8	-1	6
a_2	0	1	0	10	1	-7
a_3	0	0	1	5	1	-4

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -1 & 6 \\ 10 & 1 & -7 \\ 5 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Mennyi $(A^{-1})_{31}$, ha az indexálás 1-nel kezdődik?

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -32$$

Kieg. oldat:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

"31" elem

töröld a "13" elem sorát, oszlopát,

$$\text{marad: } \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$(A^{-1})_{31} = \frac{1}{-32} \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Valóban:} \\ A^{-1} = \begin{bmatrix} -7/8 & -1/8 & 3/8 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 5/8 & -1/8 & -1/8 \end{bmatrix} \end{array} \right]$$