47db

Zh1, Lin.Alg., 2024.Okt.30. NEPTUN: Aláírás:

Név:

1. ((2+1+1)+3+3 pont)

A) Legyen $f : ((x, y)^T) \to (y + 2x,\ 3y - 4x,\ x)^T$ és $g : ((x, y, z)^T) \to (z - y,\ 3y - 2x, x - z)^T$.

a) Írd fel az f és g transzformációk F, G mátrixait!

$$\begin{bmatrix} y+2x \\ 3y-4x \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+1y \\ -4x+3y \\ 1x+0y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{F} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z-y \\ 3y-2x \\ x-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0x-1y+1z \\ -2x+3y+0z \\ 1x+0y-1z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{G} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

b) Abban az esetben, ha létezik, mennyi az $f \circ g$ transzformáció mátrixa?

$$FG = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Big\updownarrow 3$$

a mátrixszorzás nem végezhető el: $2 \neq 3$

$$\mathbb{R}^3 \xleftarrow{f} \mathbb{R}^2 \quad \mathbb{R}^3 \xleftarrow{g} \mathbb{R}^3$$

nem ugyanaz, nincs összetett $f \circ g$ függvény

c) Abban az esetben, ha létezik, mennyi az $g \circ f$ transzformáció mátrixa?

$$GF = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -16 & 7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

B) Legyen $P = (4, 0)$, $Q = (0, 8)$. Melyek a konvex kombinacioi a P, Q pontoknak a kovetkezoek kozul es miert:

$S =$ $(3, 3)$, $(-4, 16)$, $(3, 2)$.

S konvex kombinációja P, Q-nak: $S = t \cdot P + (1-t) \cdot Q$, $t \in [0,1]$

$(3,3) = t\cdot(4,0) + (1-t)\cdot(0,8) \longleftrightarrow 3 = 4t$ és $3 = (1-t)\cdot 8$

$t = 3/4$ $\quad t = \frac{5}{8}$ $\quad \frac{3}{4} \neq \frac{5}{8}$, $(3,3)$ NEM Konvex. komb.

$(-4,16) = t\cdot(4,0) + (1-t)\cdot(0,8) \longleftrightarrow -4 = 4t$ és $16 = (1-t)\cdot 8$

$t = -1$ $\quad t = -1$ $\quad -1 = -1$, de $-1 \notin [0,1]$, tehát $(-4,16)$ NEM Konv. komb.

$(3,2) = t\cdot(4,0) + (1-t)\cdot(0,8) \longleftrightarrow 3 = 4t$ és $2 = (1-t)\cdot 8$

$t = 3/4$ $\quad t = 3/4$ $\quad 3/4 = 3/4$ és $3/4 \in [0,1]$ tehát $(3,2)$ Konvex Kombináció

C) Legyen $\vec{a} = (1, 0, 1)$, $\vec{b} = (0, t, 1)$, $\vec{c} = (t, 1, t)$. Mennyi lehet t, ha a harom vektor lineariasan fuggo?

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lin. függő $\Longleftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$

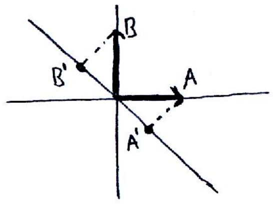
$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & t & 1 \\ t & 1 & t \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ t & t \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & t \\ t & 1 \end{vmatrix} = (t^2 - 1) - 0 + (-t^2) = -1$$

$-1 \neq 0$, így a három vektor semilyen t értek esetén sem lesz lineárisan függő.

2. ((1+1+2)+2+(2+2) pont) Írd fel a következő transzformációk mátrixait, ha az $\mathbb{R}^2$ vektorteret ortonormált bázisban az $(x,y)^T$ vektorokkal koordinátázzuk!

A) $\mathbb{R}^2$-ben:

a) a $-x-y=0$ egyenesre való merőleges vetítés,

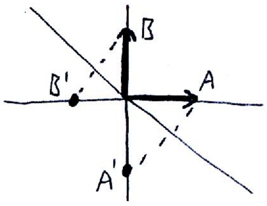


$$P: A \to A' \qquad P\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/2\\-1/2\end{bmatrix}$$

$$P: B \to B' \qquad P\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/2\\1/2\end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}1/2\\-1/2\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-1/2\\1/2\end{matrix}}\end{bmatrix}$$

b) az $x+y=0$ egyenesre való merőleges tükrözés,



$$T: A \to A' \qquad T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$$

$$T: B \to B' \qquad T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}}\end{bmatrix}$$

c) az origón átmenő, az $(3,4)^T$ vektorral párhuzamos egyenesre való merőleges vetítés,

$$\vec{n} = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} \qquad \vec{n}^\circ = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$$

$$P_{\vec{n}} = \vec{n}^\circ\, \vec{n}^{\circ T} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix}9 & 12\\12 & 16\end{bmatrix}$$

B)

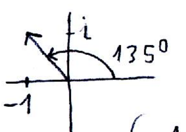
1. Oldd meg u, v-re:

$$\text{I.} \quad u - iv = -1,$$
$$\text{II.} \quad iu - 2iv = i.$$

$$\text{I.} \to u = -1 + iv \xrightarrow{\text{II.}} i(-1+iv) - 2iv = i$$
$$-v - 2iv = 2i$$
$$(-1-2i)v = 2i \longrightarrow v = \frac{2i}{-1-2i} = \frac{2i}{-1-2i} \cdot \frac{-1+2i}{-1+2i} = \frac{-4-2i}{(-1)^2+(-2)^2}$$
$$= \boxed{-\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i = v}$$

$$u = -1 + i\left(-\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i\right) = \left(-1 + \frac{2}{5}\right) - \frac{4}{5}i = \boxed{-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i = u}$$

2. a) Mennyi $(-1+i)^8$? Add meg a valaszt trigonometrikus es algebrai alakban is!



$$-1+i = \sqrt{(-1)^2+1^2}\cdot\left(\cos(135^\circ) + i\cdot\sin(135^\circ)\right) = \sqrt{2}\left(\cos 135^\circ + i\cdot\sin 135^\circ\right)$$

Vagy $\frac{3\pi}{4}$

$$(-1+i)^8 = \sqrt{2}^{\,8}\left(\cos[8\cdot135^\circ] + i\cdot\sin[8\cdot135^\circ]\right) = 2^4\left(\cos \underbrace{1080^\circ}_{3\cdot360^\circ} + i\cdot\sin 1080^\circ\right)$$

$$= 2^4\left(\underbrace{\cos 0^\circ}_{1} + i\cdot\underbrace{\sin 0^\circ}_{0}\right) = 16$$

b) Mennyi $(-1+i)^{1/2}$? A valaszt trigonometrikus alakban add meg!

$$z_{1,2} = \sqrt{\sqrt{2}}\left(\cos\left[\frac{135^\circ}{2} + \frac{360^\circ}{2}\cdot k\right] + i\cdot\sin\left[\frac{135^\circ}{2} + \frac{360^\circ}{2}\cdot k\right]\right) \qquad k = 0,1$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos 67.5^\circ + i\cdot\sin 67.5^\circ\right) \qquad 67.5^\circ = \frac{3}{8}\pi \text{ radián}$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos 247.5^\circ + i\cdot\sin 247.5^\circ\right) \qquad 247.5^\circ = \frac{11}{8}\pi$$

3. (1+1+2+2+4 pont)
Adott öt pont

$$P = (0, -3, 0), \quad Q = (0, 0, -3), \quad R = (-3, 0, 0), \quad S = (6, 6, 6), \quad T = (5, 5, 5)$$

az $\mathbb{R}^3$ Euklideszi vektortérben egy ortonormált bázisban.

a) Írd fel a S és T pontokat tartalmazó egyenes parametrikus egyenletét!

$$\vec{v} = \vec{ST} = T - S = (5,5,5) - (6,6,6) = (-1,-1,-1)$$

$$\vec{r}(t) = S + t\,\vec{v} = (6,6,6) + t\cdot(-1,-1,-1) = (6-t,\ 6-t,\ 6-t)$$

b) Írd fel a S és T pontokat tartalmazó egyenes algebrai egyenleteit!

$$x = 6-t \qquad y = 6-t \qquad z = 6-t$$

$$t = 6-x = 6-y = 6-z$$

Alg. egyenletek: pl. $\begin{matrix} 6-x = 6-y \\ 6-y = 6-z \end{matrix}$ vagy $\begin{matrix} x = y \\ y = z \end{matrix}$ vagy $\begin{matrix} x - y + 0z = 0 \\ 0x + y - z = 0 \end{matrix}$, stb.

c) Írd fel a a P, Q és R pontokat tartalmazó sík algebrai egyenletét!

$$\vec{a} = \vec{PQ} = Q - P = (0,0,-3) - (0,-3,0) = (0,3,-3)$$

$$\vec{b} = \vec{PR} = R - P = (-3,0,0) - (0,-3,0) = (-3,3,0)$$

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\cdot\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}\vec{k} = 9\vec{i} + 9\vec{j} + 9\vec{k} = 9\cdot(1,1,1)$$

$$\vec{n}\cdot[\vec{r} - P] = 0$$

$$9\cdot(1,1,1)\cdot[(x,y,z) - (0,-3,0)] = 0$$

$$9x + 9y + 9z + 27 = 0 \quad \text{vagy} \quad x + y + z + 3 = 0$$

d) Hol van a sík és az egyenes metszéspontja?

$$x + y + z + 3 = 0$$

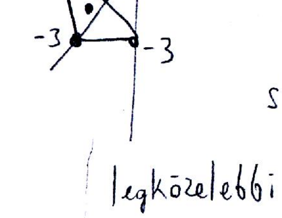
$$(6-t) + (6-t) + (6-t) + 3 = 0$$

$$21 - 3t = 0$$

$$t = 7$$

$$\vec{r}(7) = (6-7,\ 6-7,\ 6-7) = (-1,-1,-1)$$

e) Mennyi a sik es az origo tavolsaga? Hol van a siknak az origohoz legkozelebbi pontja?



$$\vec{n} = (-1,-1,-1)$$

$$\vec{n}^{\,0} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,-1)$$

sík-origó távolság: $d = \left|(\vec{n}^{\,0}, P)\right| = \left|\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,-1),\ (0,-3,0)\right)\right| = \sqrt{3}$

legközelebbi pont: $d\,\vec{n}^{\,0} = \sqrt{3}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,-1)\right] = (-1,-1,-1)$

4. (2+3+3+2 pont)

A) Legyen $\vec{n_1} = (-1/2, \sqrt{3}/2)^T$, $\vec{n_2} = (-\sqrt{3}/2, -1/2)^T$, $\vec{r} = (4,4)^T$. Ha $\vec{r} = \alpha_1\vec{n_1} + \alpha_2\vec{n_2}$ akkor mennyi α_1 es α_2 ?

$\vec{n}_1, \vec{n}_2$ ortonormált bázis, hiszen $|\vec{n}_1| = |\vec{n}_2| = 1$, $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0$.

Ezért $(\vec{n}_1, \vec{r}) = (\vec{n}_1, \alpha_1\vec{n}_1 + \alpha_2\vec{n}_2) = \alpha_1$

$(\vec{n}_2, \vec{r}) = (\vec{n}_2, \alpha_1\vec{n}_1 + \alpha_2\vec{n}_2) = \alpha_2$

Tehát $\alpha_1 = \left(\begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = -\frac{1}{2}\cdot 4 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4 = -2 + 2\sqrt{3}$, $\quad \alpha_2 = \left(\begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot 4 =$

$= -2 - 2\sqrt{3}$

B) Legyen $\bar{a} = (2,1,3)$, $\bar{b} = (2,0,4)$. Mennyi

- az $\bar{a}\bar{b}$ skalaris szorzat,

$$\vec{a}\,\vec{b} = 2\cdot 2 + 1\cdot 0 + 3\cdot 4 = 16$$

- az $\bar{a}$ és a $\bar{b}$ vektorok altal bezart szog koszinusza,

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{16}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}\cdot\sqrt{2^2+0^2+4^2}} = \frac{16}{\sqrt{14}\sqrt{20}} = \frac{16}{\sqrt{5\cdot 7}\cdot\sqrt{2}\cdot 4} = \frac{4}{\sqrt{5\cdot 7\cdot 2}}$$

- az $\bar{a}$ és a $\bar{b}$ oldalu haromszog terulete? $\quad T_\Delta = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{2}$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}}_{1\cdot 4 - 3\cdot 0}\cdot\vec{i} - \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}_{2\cdot 4 - 3\cdot 2}\cdot\vec{j} + \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}_{2\cdot 0 - 1\cdot 2}\cdot\vec{k} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k} =$$

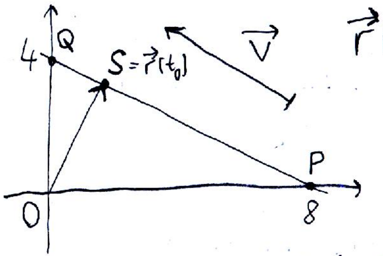
$$= (4, -2, -2)$$

$$T = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{24} = \sqrt{6}$$

C) Legyen $P = (8,0)$, $\quad Q = (0,4)$. Ird fel a ket ponton atmeno egyenes parametrikus egyenletet! Mennyi az egyenes es az origo tavolsaga? Keresd meg az egyenes azon R pontjat, amelyik a legkozelebb van az origohoz!

$\vec{PQ} = \vec{v} = (0,4) - (8,0) = (-8, 4)$

$\vec{r}(t) = P + t\vec{v} = (8,0) + t\cdot(-8,4) = (8 - 8t, 4t)$



$\vec{r}(t) \perp \vec{v}$

$S = \vec{r}(t_0)$: legközelebbi pont

$\vec{r}(t_0) \perp \vec{v} \quad \longleftrightarrow \quad (\vec{r}(t_0), \vec{v}) = 0$

$([8 - 8t_0, 4t_0], [-8, 4]) = -8(8 - 8t_0) + 4\cdot 4t_0 =$

$= -64 + 80t_0 = 0 \longrightarrow t_0 = \frac{64}{80} = 0.8 \longrightarrow S = r(t_0) = \left(8 - 8\cdot\frac{8}{10}, 4\cdot\frac{8}{10}\right) = \left(\frac{16}{10}, \frac{32}{10}\right) = \left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$

egyenes-origó távolság: $\sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{16}{5}\right)^2} = \frac{8}{\sqrt{5}}$

D) Legyen $(2+\sqrt{3})(x + y\sqrt{3}) = 1$, $x, y \in \mathbb{Q}$. Ird fel azt a csak racionalis szamokat tartalmazo linearis egyenletrendszert, amelynek a megoldasa x es y !

$(2 + \sqrt{3})(x + y\sqrt{3}) = 1 + 0\sqrt{3}$

$[2x + \underbrace{3y}_{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}] + [x + 2y]\sqrt{3} = 1 + 0\sqrt{3}$

$$\boxed{\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ x + 2y &= 0 \end{aligned}}$$

(Megoldás: $x = 2$
$y = -1$)

Ez nem kell a helyes megoldáshoz.