

Beadhato feladatok lineáris algebrából, 2024

1. Megjegyzések

- A beadott feladatokra maximum 15% extra jutalom adható, ehhez 4 feladat teljes megoldása szükséges. Itt a "különálló" feladatok listája:

$$2.(1-10), \quad 2.(11-18), \quad 3., \quad 4.1, \quad 4.2, \quad 4.3, \quad 5., \quad 6.1, \quad 6.2, \quad 6.3.1, \quad 6.3.2, \quad 6.3.3, \quad 6.4.$$

- A megoldások benyújtása kizárólag személyesen történhet, vagy a fogadóórán, vagy az utolsó szerda délutáni alkalommal.
- A javítása a beadott feladatoknak abból fog állni, hogy Onoknak el kell majd személyesen magyarázni néhány, a megoldásokból szüroprbaszeruen kiválasztott részt.
- Egy pár a feladatokból kisse túl sok numerikus számítást tartalmaz, ezeket célszerű számítógép segítségével megoldani, ezt a legcélszerűbb valamilyen szimbolikus algebrai programcsomaggal vegrehajtani. Lásd erről az utolsó ?? szekciót.

2. Szabályos háromszög

Legyen $\vec{n}_0 = (1, 0)^T$, továbbá legyen $\vec{n}_1$ és $\vec{n}_2$ két olyan egységvektor amelyek 120° , illetve 240° fokos szögeket zárnak be $\vec{n}_0$ -lal.

- Add meg $\vec{n}_1$ -et és $\vec{n}_2$ -ot!
- Ird fel a három komplex gyököt 1-nek!

Az $\vec{n}_i$, $i = 0, 1, 2$ vektorok által megadott A, B, C pontok egy egyenlő oldalú $ABC\triangle$ háromszöget adnak meg.

- Mekkora a $\triangle$ kerülete?
- Mekkora a $\triangle$ területe?

Az origó körüli $0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$ fokos elforgatások a háromszöget önmagába viszik át, vagyis permutálják a háromszög csúcsait. (Ezek a transzformációk egy csoportnak nevezett algebrai struktúrát alkotnak, ezt vizsgáljuk a következő kérdések.)

- Add meg a $0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$ fokos elforgatások R_0, R_1, R_2 matrixait!
 - Add meg a $0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$ fokos elforgatásokhoz tartozó π_0, π_1, π_2 permutációit a csúcsoknak!
 - Add meg az R_0, R_1, R_2 matrixok inverzeit! (Lehetőleg minél kevesebb számítással.)
 - Add meg a π_0, π_1, π_2 permutációk inverzeit!
- Megjegyzés: Peldaul

$$\sigma = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix} \implies \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} B & C & A \\ A & B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}.$$

- Add meg az R_0, R_1, R_2 matrixok szorzótabláját, vagyis add meg a következő táblázat hiányzó elemeit! (Lehetőleg minél kevesebb számítással.)

	R_0	R_1	R_2
R_0	*	*	*
R_1	*	*	*
R_2	*	R_0	*

Itt a megadott elem jelentése: $R_0 = R_2 R_1$.

- Add meg az π_0, π_1, π_2 permutációk szorzótabláját hasonló módon!
- Megjegyzés: Hogyan szorozzunk össze két permutációt? Peldaul

$$\sigma = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}, \quad \text{akkor} \quad \sigma\rho = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix} \quad \text{hiszen,}$$
$$\begin{aligned} (\sigma\rho)(A) &= \sigma(\rho(A)) = \sigma(B) = A, \\ (\sigma\rho)(B) &= \sigma(\rho(B)) = \sigma(C) = C, \\ (\sigma\rho)(C) &= \sigma(\rho(C)) = \sigma(A) = B. \end{aligned}$$

11. Írd fel az origon és az A ponton áthaladó egyenesre való merőleges tükrozes T_0 matrixát és add meg a hozzá tartozó σ_0 permutációját a csúcsoknak.
12. Ismételd meg ugyanezt a B és C csúcsokra is, a kapott eredményeket jelöld T_1, T_2 illetve σ_1, σ_2 -vel!
Megjegyzés: Többféle megoldási mód is lehetséges.
 - a. Az $\vec{n}$ egységvektor origon áthaladó egyenesre való merőleges tükrozes hatása

$$T_{\vec{n}}\vec{r} = 2(\vec{n}, \vec{r})\vec{n} - \vec{r},$$

ennek alapján felírható a tükrozes

$$T_{\vec{n}} = 2\vec{n}\vec{n}^T - E$$

matrixa. Rajzolj egy ábrát ami ezt az egyenletet illusztrálja!

- b. T_0 kiszámítása remélhetőleg könnyű volt. Mennyi $T_0 R_i$ illetve $R_i T_0$, ha $i = 0, 1, 2$? Mi köze ezeknek T_0, T_1, T_2 -hoz?

13. Írd fel a T_0, T_1, T_2 tükrozesek és a $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ permutációk inverzeit!
14. Igaz-e, hogy $T_1 T_2$ szintén egy tükrozes lesz?
15. Írd fel az $R_0, R_1, R_2, T_0, T_1, T_2$ matrixok szorzó tábláját!
16. Írd fel a $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ permutációk szorzó tábláját!

A következő feladatok a konvex kombináció fogalmát használhatják.

17. Rajta van-e az $ABC\triangle$ háromszagon a P pont, ha P

$$(0, 0)^T, \quad (-1, 0)^T, \quad (1, 0)^T \quad (0, 1)^T \quad (1/2, 1/2)^T, \quad (-1/4, 1/2)^T.$$

18. Keresd meg a következő egyenesek és az $ABC\triangle$ háromszagon kerületének a metszetet!

3. Szabályos tetraéder

1. Vedd az előző ?? feladatban kiszámolt $\vec{n}_i$, $n = 0, 1, 2$ vektorokat. Adj hozzájuk egy extra $z = 0$ koordinátát, így három darab háromdimenziós vektort kapunk, jelöljük ezeket továbbra is $\vec{n}_i$ -vel, a kapott pontokat pedig A, B, C -vel. Hol van az $\mathbb{R}^3$ térben az a D pont, amelyre teljesül, hogy

$$|\overline{AB}| = |\overline{DA}| = |\overline{DB}| = |\overline{DC}|,$$

vagyis A, B, C, D egy szabályos tetraéder csúcspontjai. Hány ilyen D pont van? Ha több, használd azt, amelyiknek pozitív a harmadik koordinátája! (Probáld eloszor kitalálni D -nek az első két koordinátáját.)

2. Mekkora a tetraéder

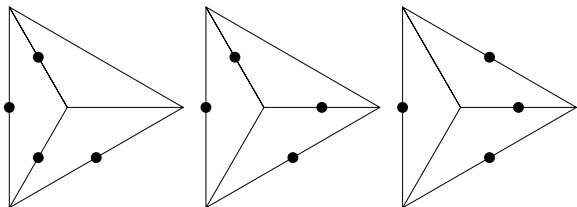
- a. terfogata,
- b. felülete,
- c. elei hosszainak az összege?

Számold ki a terfogatot ketfelekeppen: a vegyszorzat segítségével, majd a kupokra vonatkozó *alapterület · magasság/3* képletet használva!

3. Ellentétben a háromszöges feladattal, itt a tetraéder K középpontja nem az origóban van. Hanem hol?
4. Told el a koordináta-rendszert úgy, hogy K az O origóba kerüljön, majd számold újra az A, B, C, D pontok koordinátáit az új rendszerben! A továbbiakban ezeket a koordinátákat használd!
5. Az OD egyenes körül hány fokos elforgatás (esetleg több ilyen is lehet) viszi át a tetraédert önmagába? Írd fel az ezekhez tartozó transzformációk matrixait, illetve a hozzá tartozó permutációit a csúcsoknak!
6. Adj meg egy olyan tükrozeset, ami a tetraédert önmagába viszi át! Add meg a megfelelő matrixot és permutációt!
7. Oldd meg az előző ?? feladat 5.-16. pontjainak a megfelelőit! Ezt persze csak viccből kérdezem, a megoldás kisse hosszú lenne. Ehelyett számold meg, hogy hányfelekeppen lehet a tetraédert
 - a. elforgatni,
 - b. tükrozni

úgy hogy önmagába menjen át.

8. Hány pontban metszheti egy sík a tetraeder elhalozatat? Rajzolj abrakat, amelyek illusztrálják a lehetséges eseteket!
9. Hány pontban metszheti egy, az origót tartalmazó sík a tetraeder elhalozatat? Rajzolj abrakat, amelyek illusztrálják a lehetséges eseteket!
10. Keresd meg a $z = 1/2$ sík és a tetraeder elhalozatának a metszetét!
11. Keresd meg a $x + y + z = 0$ sík és a tetraeder elhalozatának a metszetét!
12. Az alábbi ábrakon látható szabályos tetraederken mikor esik a négy bejelölt elfelező pont egy síkba? Ugyanaz lenne-e a válasz, ha a tetraeder nem lenne szabályos?



4. Gram-Schmidt eljárás

A Gram-Schmidt eljárás néhány vektor által megadott alterben konstruálja meg egy ortonormált bázist az adott alternek.

4.1. Haromszog

A háromdimenziós $\mathbb{R}^3$ terben az

$$A = (1, 0, 0), \quad B = (0, 1, 0), \quad C = (0, 0, 1)$$

pontok ketségkivül egy egyenlő oldalú haromszöget adnak meg. Az A, B, C pontok által megadott síkon válassz egy olyan koordinátarendszert, amelynek az origója a haromszög középpontjában, a koordinátatengelyeket pedig két, egymásra merőleges egységvektor generalja. Írd fel az A, B, C pontok koordinátáit ebben a kétdimenziós koordinátarendszerben!

1. Rajzold le ezt a felállást!
2. Keresd ket, az ABC síkkal párhuzamos vektort. Legyen például

$$\begin{aligned}\vec{f}_1 &= \overrightarrow{AB}, \quad \vec{f}_2 = \overrightarrow{AC}, \\ \vec{n}_1 &= \frac{1}{|\vec{f}_1|} \vec{f}_1, \\ \vec{g}_2 &= \vec{f}_2 - (\vec{n}_1, \vec{f}_2) \vec{n}_1, \\ \vec{n}_2 &= \frac{1}{|\vec{g}_2|} \vec{g}_2.\end{aligned}$$

Számold ki $\vec{n}_1$ és $\vec{n}_2$ -t! Ellenőrizd vagy bizonyítsd, hogy merőlegesek egymásra!

3. Rajzolj egy olyan ábrát, amelyik elmagyarázza az itt felsorolt lépéseket!
4. Az $\vec{n}_1$ és $\vec{n}_2$ segítségével írd fel a haromszög csúcsainak a kétdimenziós koordinátáit a feladat elején leírt koordinátarendszerben!

4.2. Tetraeder

A négydimenziós $\mathbb{R}^4$ terben az

$$A = (1, 0, 0, 0), \quad B = (0, 1, 0, 0), \quad C = (0, 0, 1, 0), \quad D = (0, 0, 0, 1)$$

pontok ketségkivül egy szabályos tetraédert adnak meg. Ismételd meg az előző feladatot erre az esetre. Az egyetlen netriviális változtatás az, hogy a Gram-Schmidt eljárás egy lépessel hosszabb lesz:

$$\begin{aligned}\vec{f}_1 &= \overrightarrow{AB}, \quad \vec{f}_2 = \overrightarrow{AC}, \quad \vec{f}_3 = \overrightarrow{AD}, \\ \vec{n}_1 &= \frac{1}{|\vec{f}_1|} \vec{f}_1, \\ \vec{g}_2 &= \vec{f}_2 - (\vec{n}_1, \vec{f}_2) \vec{n}_1, \\ \vec{n}_2 &= \frac{1}{|\vec{g}_2|} \vec{g}_2, \\ \vec{g}_3 &= \vec{f}_3 - (\vec{n}_1, \vec{f}_3) \vec{n}_1 - (\vec{n}_2, \vec{f}_3) \vec{n}_2, \\ \vec{n}_3 &= \frac{1}{|\vec{g}_3|} \vec{g}_3.\end{aligned}$$

4.3. Tengely körüli elforgatás

Írd fel az origón átmenő és $\vec{v} = (1, 2, 3)^T$ irányú tengely körüli 20° -os elforgatás R_{20° matrixát!

1. Keresd egy $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ vektorokból álló ortonormált bázist ahol $\vec{v}$ és $\vec{n}_1$ egy irányba mutat! Ehhez alkalmazd a Gram-Schmidt eljárást a $\vec{v}$ és két másik vektor, pl. $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ -re.
2. Két dimenzióban a 20° -os elforgatást az

$$R_{20^\circ} = \begin{pmatrix} \cos 20^\circ & -\sin 20^\circ \\ \sin 20^\circ & \cos 20^\circ \end{pmatrix}$$

matrix generalja. Ennek a hatása a standard bázisvektorokon a következő:

$$\begin{aligned}R_{20^\circ} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos 20^\circ \\ \sin 20^\circ \end{pmatrix} = R_{20^\circ} \vec{e}_1 = \cos 20^\circ \cdot \vec{e}_1 + \sin 20^\circ \cdot \vec{e}_2, \\ R_{20^\circ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\sin 20^\circ \\ \cos 20^\circ \end{pmatrix} = R_{20^\circ} \vec{e}_2 = -\sin 20^\circ \cdot \vec{e}_1 + \cos 20^\circ \cdot \vec{e}_2.\end{aligned}$$

Add meg a hatasat a haromdimenzios elforgatasnak az $\vec{n}_i$ basisvektorokon a ketdimenzios esethez hasonloan. Vagyis mik alhatnak a kerdojelek helyen:

$$\begin{aligned} R_{20^\circ} \vec{n}_1 &= ?? \cdot \vec{n}_1 + ?? \cdot \vec{n}_2 + ?? \cdot \vec{n}_3, \\ R_{20^\circ} \vec{n}_2 &= ?? \cdot \vec{n}_1 + ?? \cdot \vec{n}_2 + ?? \cdot \vec{n}_3, \\ R_{20^\circ} \vec{n}_3 &= ?? \cdot \vec{n}_1 + ?? \cdot \vec{n}_2 + ?? \cdot \vec{n}_3, \end{aligned}$$

(Itt persze R_{20° mar egy 3×3 matrix. A kerdojelekbol osszerakhato matrixot jelojuk $\tilde{R}_{20^\circ}$ -kal. Itt a legkonnyebb kedek az, hogy mennyi $R_{20^\circ} \vec{n}_1$.)

3. Ha

$$R_{20^\circ} (\alpha_1 \vec{n}_1 + \alpha_2 \vec{n}_2 + \alpha_3 \vec{n}_3) = \alpha'_1 \vec{n}_1 + \alpha'_2 \vec{n}_2 + \alpha'_3 \vec{n}_3,$$

tovabba

$$\begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \alpha'_3 \end{pmatrix} = \tilde{R}_{20^\circ} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix},$$

akkor mennyi $\tilde{R}_{20^\circ}$?

4. Ha

$$x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = x'_1 \vec{n}_1 + x'_2 \vec{n}_2 + x'_3 \vec{n}_3,$$

tovabba

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

akkor mennyi T es S ?

5. Eddig remelhetoleg sikerult megkonstrualni harom matrixot: $\tilde{R}_{20^\circ}$, S , T . Ezek a kovetkezo transzformaciokat vegzik el:

- T atter az "e" basisbol az "n" basisba,
- S atter az "n" basisbol az "e" basisba,
- $\tilde{R}_{20^\circ}$ elvegi a tengely koruli elforgatast az "n" basisban.

Mindezek alapjan fel tudjuk irni R_{20° -t ezen harom matrix szorzatakent. Hogyan?

Megjegyzes: Ez a feladat egy peldaja a kovetkezo altalanos semanak:

- Van egy "nehéz" feladat, esetunkben R_{20° kiszamitasa.
- Az elforgatas sokkal konnyebben kiszamithato az "n" koordinatarendszerben. Ezt vegezne el az $\tilde{R}_{20^\circ}$ matrix.
- Ezert
 - eloszor atterunk az "n", vagyis a feladathoz adaptalt koordinatarendszerre,
 - itt a feladatot megoldja esetunkben az $\tilde{R}_{20^\circ}$ matrix,
 - utana visszaterunk az eredeti "e" koordinatarendszerbe.

5. Linearis egyenletrendszer megoldhatosaga

1. Az a es b parameterek milyen ertekeinel letezik a

$$(a)(x) = (b)$$

egyenletnek

- pontosan egy,
- vegtelen sok,
- nulla szamu

megoldasa?

2. Az a es b parameterek milyen ertekeinel letezik a

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ b \end{pmatrix}$$

egyenletnek

- a. pontosan egy,
- b. végtelen sok,
- c. nulla számú

megoldása, ha az A matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}.$$

3. Az a és b paraméterek milyen értékeivel létezik a

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

egyenletnek

- a. pontosan egy,
- b. végtelen sok,
- c. nulla számú

megoldása, ha az A matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

6. Matrixok megadása, sajátrendszerek

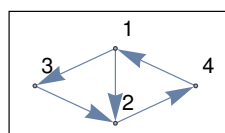
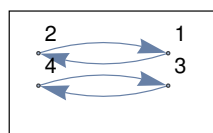
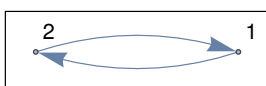
6.1. Haromdimenziós transzformációk

Az $\mathbb{R}^3$ Euklideszi vektortérben az x, y, z koordinátákat, illetve az $\vec{e}_{1,2,3}$ standard bázist. használjuk ebben a feladatban.

1.
 - a. Írd fel az y tengelyre való merőleges vetítés matrixát!
 - b. Mennyi $\vec{e}_2 \vec{e}_2^T$?
 - c. Írd fel az xz síkra való merőleges vetítés P_{xz} matrixát!
 - d. Mennyi $\vec{e}_1 \vec{e}_1^T + \vec{e}_3 \vec{e}_3^T$?
 - e. Írd fel az y tengelyre való merőleges tükrözés matrixát!
 - f. Írd fel az xz síkra való merőleges tükrözés matrixát!
 - g. Mennyi $2P_{xz} - E$?
2.
 - a. Írd fel az $x = z$ síkra való merőleges vetítés matrixát!
 - b. Írd fel az $x = z$ síkra való merőleges tükrözés matrixát!
 - c. Írd fel az $x - z = 0$ síkra való merőleges vetítés matrixát!
 - d. Írd fel az $x + z = 0$ síkra való merőleges tükrözés matrixát!
3.
 - a. Írd fel a z tengely körüli 30° -os elforgatás matrixát! Itt persze el kell dönteni, mi a pozitív irányú elforgatás. Ha viszont ez el lett döntve, az már meghatározza, hogy mi a pozitív orientáció a másik két tengely esetében.
 - b. Írd fel az x tengely körüli 30° -os elforgatás matrixát!
 - c. Írd fel az y tengely körüli 30° -os elforgatás matrixát!

6.2. Sztochasztikus mátrixok

1. Vegyük a következő weblap hálózatokat, amelyek 2,4, illetve megint 4 lapból állnak. Az ábrákön látható nyilak az egyik lapról más lapokra mutató link-eket jelölik. Tegyük fel, hogy a felhasználók viselkedése a következő: Percenként rákattintanak a lapon található linkre, ha több is van, akkor véletlenszerűen, egyforma valószínűséggel választanak közülük. Ha kezdetben a felhasználók az első esetben $(p_1, p_2)^T$, illetve a második és harmadik esetekben $(p_1, p_2, p_3, p_4)^T$ valószínűségekkel választottak a különböző lapokat, akkor mi lesz a valószínűség eloszlás 1 perc múlva? Add meg az időbeli evolúciót leíró matrixákat mindhárom esetben.



- Hogyan neznének ki ezek a matrixok, ha a felhasználók a következőképpen viselkednének: Minden perc elteltével 50% eséllyel a lapon maradnak, 50% eséllyel pedig az előző pontban leírtak módján rakattintanak egy linkre.
- Milyen speciális jellemzői vannak a sztochasztikus matrixoknak? Vizsgáld meg az elemek lehetséges értékeit, továbbá az egyazon sorban vagy oszlopban álló elemek összegeit!
- Egy S sztochasztikus matrixnak mindig van $\lambda = 1$ sajátértékű sajátvektora, ez adja meg az egyensúlyi, vagyis az időben állandó valószínűségeloszlást a rendszernek

$$S\vec{p}_{egy} = \vec{p}_{egy}.$$

Itt $\vec{p}_{egy}$ komponenseinek az összege persze 1, ekkor adhat meg egy valószínűségeloszlást. Tippeld meg, hogy a három eset közül melyekben egyértelmű $\vec{p}_{egy}$, vagyis mikor van csak egy egyensúlyi állapot!

- Számold ki $\vec{p}_{egy}$ -t mindhárom esetben! Eloszor tegy így az 1. pontban kapott matrixokkal, majd vegezd el ugyanezt a 2. pont matrixaival is! Ki tudod találni a 2. ponthoz tartozó megoldásokat számolás nélkül?
- Az első, két lapból álló halozat esetében csak egy $\vec{p}_{egy}$ egyensúlyi eloszlás van. Vajon igaz-e, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S^n \vec{p} = \vec{p}_{egy}$$

barmely $\vec{p}$ kezdeti valószínűségeloszlás esetében? Mi a válasz ha az S matrixot az 1. illetve 2. pont alapján számoljuk ki? Probáld eloszor meg tippelni a választ számolás nélkül!

6.3. Fibonacci sorozatok

6.3.1.

Legyen

$$G_{n+1} = G_n + 6G_{n-1}, \quad G_0 = G_1 = 1.$$

Mennyi G_n ?

- Keress olyan $g_n = q^n$ mertani sorozatokat, amelyek kielégítik G_n rekurzív szabályt, vagyis

$$g_{n+1} = g_n + 6g_{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad q^{n+1} = q^n + 6q^{n-1}.$$

Hány ilyen van?

- Gyozd meg magad, hogy ha q_1^n és q_2^n ilyen sorozat, akkor ugyanez igaz $h_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n$ -re is!
- Keress meg α, β -t, ha $h_0 = h_1 = 1$, az így kapott h_n sorozat magadja G_n -t.
- Legyen

$$\vec{G}(n) = \begin{pmatrix} G_n \\ G_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \vec{G}(n+1) = A\vec{G}(n).$$

Mennyi A ?

- Keress meg A -nak a $\lambda_{1,2}$ sajátértékeit! Mi közülük van ezeknek az 1. pontban kapott q értékekhez?
- Ird fel A -nak két független $\vec{v}_{1,2}$ sajátvektorát, lehetőleg az $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ egyenlet explicit megoldása nélkül!
- Ird fel a kezdeti $\vec{G}(1)$ állapotot a $\vec{v}_{1,2}$ sajátvektorok lineáris kombinációjaként:

$$\vec{G}(1) = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2.$$

Mennyi α, β ?

- Mennyi $\vec{G}(n)$?

- Ha

$$x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 = x'_1 \vec{v}_1 + x'_2 \vec{v}_2, \quad \text{es} \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix},$$

akkor mennyi T és S ?

- Ird fel A -t a T, S és a diagonális

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

matrixok szorzataként!

- Ird fel A^n -t a T, S és egy diagonális matrix szorzataként!

6.3.2.

Most modositjuk az elozo feladat rekurziv szabalyat:

$$G_{n+1} = G_n + 6G_{n-1} + 1, \quad G_0 = 1, \quad G_1 = 2.$$

1. Ekkor

$$\vec{G}(n) = \begin{pmatrix} G_n \\ G_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \vec{G}(n+1) = A\vec{G}(n) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Keresd meg az

$$\vec{x}(n+1) = A\vec{x}(n) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dinamikai rendszer $\vec{x}_{fix}$ fixpontjat, vagyis old meg az

$$\vec{x}_{fix} = A\vec{x}_{fix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletet!

2. Helyezd a koordinatrendszer origojat az $\vec{x}_{fix}$ pontba, azaz jellemezd a rendszer állapotát a

$$\overrightarrow{\Delta G}(n) = \vec{G}(n) - \vec{x}_{fix}$$

vektorral. Mennyi $\overrightarrow{\Delta G}(1)$?

3. Ellenorizd, hogy

$$\overrightarrow{\Delta G}(n+1) = A\overrightarrow{\Delta G}(n).$$

4. Mennyi $\overrightarrow{\Delta G}(n)$? (Ennek a kiszamitasahoz hasznald fel az elozo feladat eredményeit!)

5. Mennyi $\vec{G}(n)$?

6.3.3.

Ismeteld meg az elozo ket feladatot a klasszikus Fibonacci sorozatra, azaz szamold ki F_n -t, ha

1.

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad F_0 = 1, \quad F_1 = 1,$$

2.

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} + 1, \quad F_0 = 1, \quad F_1 = 2.$$

6.4. Kvantum kapuk

Megjegyzes: Kisse leegyszerusitve a dolgok allasat, a feladatban (helytelenul) valos Eukledeszi terben fogunk dolgozni a (helyes) complex Hilbert-ter helyett. Tovabbi informaciokert nezd meg ezt itt.

Egy m -qubit kvantum regiszter allapotat egy egysegektor adja meg az $\mathbb{R}^{2^m}$ vektorterben, amelynek a standard ortonormalt bazisat az $|b_0b_1 \dots b_m\rangle$ vektorok alkotjak, ahol b_i vagy 0 vagy 1. Tehat a bazisok 1,2,3 qubitek esetenben:

$$\begin{aligned} 1 \text{ qubit} : & \quad |0\rangle, |1\rangle, \\ 2 \text{ qubit} : & \quad |00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle, \\ 3 \text{ qubit} : & \quad |000\rangle, |001\rangle, \dots, |110\rangle, |111\rangle. \end{aligned}$$

Kvantum operacionak nevezzuk az ortogonális (azaz hosszmegorzo) linearis transzformaciokat. A kovetkezoekben hasznaljuk a kovetkezo jeloleseket:

$$\bar{b} = 1 - b, \quad a \wedge b = \min(a, b), \quad a \vee b = \max(a, b), \quad a \oplus b = a + b, \text{ kiveve, hogy } 1 \oplus 1 = 0.$$

Ird fel a kovetkezo operaciok matrixait, es ellenorizd, hogy melyek adnak meg ortogonális transzformaciokat, vagyis melyek tekinthetoek kvantum operacionak!

1. 1 qubit, *NOT*:

$$NOT|0\rangle = |1\rangle, \quad NOT|1\rangle = |0\rangle,$$

2. 2 qubit, NOT_0, NOT_1, NOT_{01} :

$$\begin{aligned} NOT_0|b_0b_1\rangle &= |\bar{b}_0b_1\rangle, \\ NOT_1|b_0b_1\rangle &= |b_0\bar{b}_1\rangle, \\ NOT_{01}|b_0b_1\rangle &= |\bar{b}_0\bar{b}_1\rangle. \end{aligned}$$

3. 1 qubit *Erase*:

$$\text{Erase } |b\rangle = |0\rangle.$$

4. Masold le a nulladik bitet az elso pozicioba.

2 qubit *Clone*:

$$\text{Clone } |b_0 b_1\rangle = |b_0 b_0\rangle.$$

5. Masold le a nulladik bitet az elso pozicioba, feltevezve, hogy az elso pozicio allapota 0 volt kezdetben.

2 qubit *QuantumClone*:

$$\text{QuantumCopy } |b_0 b_1\rangle = |b_0(b_0 \oplus b_1)\rangle.$$

6. 3 qubit *AND*:

$$\text{AND } |b_0 b_1 b_2\rangle = |b_0 b_1(b_0 \wedge b_1)\rangle.$$

7. 3 qubit *QuantumAND*:

$$\text{QuantumAND } |b_0 b_1 b_2\rangle = |b_0 b_1((b_0 \wedge b_1) \oplus b_2)\rangle.$$

8. 3 qubit *AND*:

$$\text{OR } |b_0 b_1 b_2\rangle = |b_0 b_1(b_0 \vee b_1)\rangle.$$

9. 3 qubit *QuantumAND*:

$$\text{QuantumOR } |b_0 b_1 b_2\rangle = |b_0 b_1((b_0 \vee b_1) \oplus b_2)\rangle.$$

9. 1 qubit Hadamard:

$$\text{Hadamard } |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad \text{Hadamard } |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle).$$

Megjegyzes:

a. Az hasznalt elnevezesek nem standardak.

b. Az itt felsorolt konstrukciokban az $\oplus$ hasznalata arra szolgal, hogy az "eredmenyt" beirja az utolso bit poziciojaba, de ez irreverzibilisse (visszafoordithatatlan) lenne az operaciot. Ezert a sima bemasolas helyett az utolso bit "erteke"

$$\text{eredmeny} \oplus (\text{utolso bit})$$

lesz, ami a korrekt eredmeny, ha az utolso bit 0 volt, vagyis az utolso bit egy meg soha fel nem hasznalt, 0 alapallapotu "friss" bit volt.

7. Komputer algebra rendszerek

A legnepszerubb rendszerek talan a Mathematica es a Matlab, ezek draga, kereskedelmi rendszere. A Matlab-nak az Octave rendszer egy eleg jo ingyenes klonja, mig a Mathematica-nak egy elegge limitalt, Mathics nevű klonja letezik.

A legteljesebb ingyenes rendszer a Sage, ezt ki lehet itt probalni. Illusztraciokent oldjuk meg a kovetkezo feladatot:

7.0.1.

Legyen

$$\vec{f}_1 = (2, 1, 4), \quad \vec{f}_2 = (4, 1, 2), \quad \vec{f}_3 = (0, 2, 0).$$

Alkalmazd erre a harom vektorra a Gram-Schmidt eljarast ??.

Sage kod:

```
f1=vector([2,1,4])
f2=vector([4,1,2])
f3=vector([0,2,0])
f1norm=f1.norm()
n1=f1/f1norm
g2=f2-(f2.dot_product(n1))*n1
n2=g2/(g2.norm())
g3=f3-(f3.dot_product(n1))*n1-(f3.dot_product(n2))*n2
n3=g3/(g3.norm())
matrix([n1,n2,n3])
```

Eredmeny:

```
[ 2/21*sqrt(21)  1/21*sqrt(21)  4/21*sqrt(21)]
[ 25/38*sqrt(38/21)  1/19*sqrt(38/21) -13/38*sqrt(38/21)]
[ -1/2*sqrt(2/19)  3*sqrt(2/19)  -1/2*sqrt(2/19)]
```

Itt az $\vec{n}_{1,2,3}$ vektorokat mint sorokat tartalmazza az eredmeny.