ûj Zh2, Lin.Alg., 2023.12.05. NEPTUN: Aláírás:

Név:

1. (2+3+2+3 pont) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Keresd meg A sajatertekeit!

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 0\cdot 2 = (1-\lambda)(3-\lambda),$$

tehát $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3.$

Keresd meg A sajatvektorait!

$\lambda_1 = 1$: $A - 1\cdot E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$(A - 1E)\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$2x + 2y = 0$

$y = -x$

sajátaltér: $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix} \right\}$, $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 3$: $A - 3E = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

$(A - 3E)\vec{v}_2 = \vec{0} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$-2x = 0, \ 2x = 0$

$x = 0$

sajátaltér: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right\}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Mennyi $A^{13}\,(6,8)^T$?

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 6 = 1\cdot\alpha \\ 8 = -\alpha + \beta \end{matrix}\right\} \longrightarrow \alpha = 6, \ \beta = 14$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = 6\vec{v}_1 + 14\vec{v}_2$$

$$A^{13}\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = A^{13}(6\vec{v}_1 + 14\vec{v}_2) = 6\cdot A^{13}\vec{v}_1 + 14\,A^{13}\vec{v}_2 = 6\cdot 1^{13}\vec{v}_1 + 14\cdot 3^{13}\cdot\vec{v}_2$$

$$= 6\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 14\cdot 3^{13}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mennyi A^{13} ?

$$A = SDS^{-1} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \lambda_1 \quad \lambda_2$

$$A^{13} = SD^{13}S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1^{13} & 0 \\ 0 & 3^{13} \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1+3^{13} & 3^{13} \end{bmatrix}$$

ezeket nem kell kiszámolni

2. (6+4 pont) a) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Szamold ki pivotalassal (vagy maskeppen) A inverzet! Ellenorizd az eredmenyed!

	a_1	a_2	a_3	e_1	e_2	e_3
e_1	0	2	0	1	0	0
e_2	$\boxed{1}$	0	0	0	1	0
e_3	0	0	3	0	0	1
e_1	0	$\boxed{2}$	0	1	0	0
a_1	1	0	0	0	1	0
e_3	0	0	3	0	0	1
a_2	0	1	0	1/2	0	0
a_1	1	0	0	0	1	0
e_3	0	0	$\boxed{3}$	0	0	1
a_2	0	1	0	1/2	0	0
a_1	1	0	0	0	1	0
a_3	0	0	1	0	0	1/3
a_1	1	0	0	0	1	0
a_2	0	1	0	1/2	0	0
a_3	0	0	1	0	0	1/3

Tehát $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$

Valóban:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \boxed{0} \\ \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ 3 & 1 & 0 & \boxed{1} \\ 4 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}. \quad A_{24}$$

Mennyi $(A^{-1})_{42}$, ha az indexálás 1-nel kezdodik?

Az A_{24}-es elem kiegészítő aldeterminánsa:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{Tehát } (A^{-1})_{42} = \frac{(-1)^{4+2}}{\det(A)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ persze ha } \det A \neq 0.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & \boxed{1} & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \overbrace{\left(-1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right)}^{-1} - 2 \cdot \overbrace{\left(-1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\right)}^{+1} = -3,$$

tehát A^{-1} létezik, és $(A^{-1})_{42} = 0$

3. ((2+3+1)+(2+2) pont)

a) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Keresd meg A sajaterteketit! $0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda) - 0 \cdot 1 =$

$= (2-\lambda)^2 = 0$

$\longrightarrow \lambda_1 = 2$, csak egy gyök létezik

Keresd meg A sajatvektorait!

$$A - 2 \cdot E = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - 2E)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$0x + 0y = 0$

$1x + 0y = 0$

$x = 0$

sajátaltér: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\}$ vagy $\mathbb{C}$

Add meg az A sajatvektorai alkotott alter egy bazisat!

bázis: pl. $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ez persze csak a saját altér bázisa, a két dimenziós vektorteret már nem generálja.

b) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}.$$

Ird fel azt a negyismeretlenes egyenletrendszert, amit az x, y, u, v ismeretlenek kielegitenek!

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & u \\ y & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x & 2u \\ x + 2y & u + 2v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$2x = 1$

$x + 2y = 0$

$x = 1/2$,

$\frac{1}{2} + 2y = 0$,

$y = -1/4$

$2u = 0$

$u + 2v = 1$

$u = 0$

$0 + 2v = 1$

$v = \frac{1}{2}$,

Oldd meg ezeket az egyenleteket, vagyis szamold ki, hogy mennyi A^{-1} !

tehát

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

4.A (6+(2+2) pont) Oldd meg pivotálással a kovetkezo egyenletrenszert! Adj meg egy partikularis megoldast! Ad meg egy bazisát a homogen egyenlet megoldasainak! Ird fel az altalanos megoldast!

$$3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 6x_4 - 3x_5 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 2.$$

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & b \\
\hline
e_1 & 3 & 6 & -9 & 6 & -3 & 1 \\
e_2 & \boxed{1} & 2 & -3 & 2 & 1 & 2 \\
\hline
e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-6} & -5 \\
a_1 & 1 & 2 & -3 & 2 & 1 & 2 \\
\hline
a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5/6 \\
a_1 & 1 & 2 & -3 & 2 & 0 & 7/6
\end{array}$$

$\frac{-5}{\boxed{-6}}$

$\frac{\boxed{-6}\cdot 2 - (-5)\cdot 1}{\boxed{-6}}$

partikuláris megoldás:

"b" oszlop: $\vec{b} = 5/6\,\vec{a}_5 + 7/6\,\vec{a}_1$

$$\vec{x}_{part} = \begin{bmatrix} 7/6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5/6 \end{bmatrix}$$

homogén megoldások (azon "a" oszlopokból, amelyekben nincs pivot elem)

"a_2" oszlop: $\vec{a}_2 = 2\vec{a}_1$ → $2\vec{a}_1 - 1\cdot\vec{a}_2 = \vec{0}$

$$\vec{x}_{hom_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

"a_3" oszlop: $\vec{a}_3 = -3\vec{a}_1$ → $-3\vec{a}_1 - 1\cdot\vec{a}_3 = \vec{0}$

$$\vec{x}_{hom_3} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

"a_4" oszlop:

$$\vec{x}_{hom_4} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Magyarázat:

$$\begin{array}{c|c}
 & a_3 \\
\hline
a_5 & 0 \\
a_1 & -3
\end{array}
\qquad
\begin{bmatrix} \boxed{-3} \\ 0 \\ \boxed{-1} \\ 0 \\ \boxed{0} \end{bmatrix}$$

$\vec{x}_{hom_3}$-nak a 3-adik eleme -1

a táblázat ezen oszlopából hiányoznak az "a_2", "a_4" címkék, így $\vec{x}_{hom_3}$-nak a 2,4 komponensei nullák

$$\vec{x}_{ált} = \begin{bmatrix} 7/6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5/6 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

itt $t_2 = -x_2$, stb.

4.B.1

1. Legyen $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 2 - x_n$. Mennyi x_n ?

(A) Fixpont: $x_{fix} = 2 - x_{fix} \longrightarrow x_{fix} = 1$

$$x_n = (-1)^n(x_0 - x_{fix}) + x_{fix} = (-1)^n(0-1)+1 = 1 + (-1)^{n+1}$$

(B) Számold ki az első pár elemet:

$x_0 = 0$, $x_1 = 2-0 = 2$, $x_2 = 2-2 = 0$, $x_3 = 2-0 = 2 \ldots$ $\quad 0, 2, 0, 2, \ldots$

periodikus sorozat,
$$x_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páros} \\ 2, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

2. Legyen $x_0 = 13$, $x_{n+1} = x_n - 2$. Mennyi x_n ?

Számtani sorozat: $x_n = x_0 + n\cdot d = 13 + n(-2) = 13 - 2n$

szomszédos elemek különbsége