Zh1, Lin.Alg., 2023 NEPTUN: Aláírás:

Név:

2 3

1. ((2+1+~~1~~)+(~~1+2~~)+2 pont)

A) Legyen $f : ((x, y, z)^T) \to (z - y + 2x,\ 3y - 4x + z)^T$ és $g : ((x, y)^T) \to (y,\ 3y - 2x)^T$.

a) Ird fel az f és g transzformációk F, G mátrixait!

$$f: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} z-y+2x \\ 3y-4x+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{tehát } F = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} y \\ 3y-2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{tehát } G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

b) Abban az esetben, ha létezik, mennyi az $f \circ g$ transzformáció mátrixa?

$$FG = \begin{bmatrix} \boxed{2 \ -1 \ 1} \\ -4 \ \ 3 \ \ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} \\ -2 & \boxed{3} \end{bmatrix}$$ nem létezik

$$\mathbb{R}^2 \xleftarrow[F]{f} \mathbb{R}^3 \qquad \mathbb{R}^2 \xleftarrow[G]{g} \mathbb{R}^2$$

nem ugyanaz, nincs $f \circ g$ összetett függvény

c) Abban az esetben, ha létezik, mennyi az $g \circ f$ transzformáció mátrixa?

$$GF = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -16 & 11 & 1 \end{bmatrix}$$

B) a) Legyen $P = (2, -4)$, $Q = (8, 4)$. Melyek a konvex kombinacioi a P, Q pontoknak a kovetkezoek kozul es miert:

$$(2, 12),\ (4, 8),\ (5, 0),\ (11, 8).$$

> Oldd meg t-re, ha $t \in [0,1]$, akkor konvex kombináció

$t \cdot (2,-4) + (1-t) \cdot (8,4) = (2, 12)$: $2t + 8(1-t) = 2 \longrightarrow t = 1$; $-4t + 4(1-t) = 12 \longrightarrow t = -1$

nincs megoldás, ellentmondó egyenletek

——"—— $= (4, 8)$: $6t + 8 = 4 \longrightarrow t = 4/6$; $-8t + 4 = 8 \longrightarrow t = -1/2$

nincs megoldás

——"—— $= (5, 0)$: $6t + 8 = 5 \longrightarrow t = 1/2$; $-8t + 4 = 0 \longrightarrow t = 1/2$

van megoldás ÉS $t \in [0,1]$

——"—— $= (11, 8)$: $6t + 8 = 11 \longrightarrow t = 1/2$; $-8t + 4 = 8 \longrightarrow t = -1/2$

nincs megoldás

Tehát (5,0) konvex kombinációja P és Q-nak, a többi pont nem az.

c) Legyen $\vec{a} = (0, 0, 0)$, $\vec{b} = (0, t, 1)$, $\vec{c} = (t, 0, 1)$. Mennyi lehet t, ha a harom vektor lineariasan fuggo?

Mivel $\vec{a} = (0,0,0)$, így a három vektor eleve lineárian függő, t bármi lehet.*

Ugyanez komplikáltabban:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 \\ t & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} t & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ t & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot (t \cdot 1 - 1 \cdot 0) - 0 \cdot (0 \cdot 1 - 1 \cdot t) + 0 \cdot (0 \cdot 0 - t \cdot t) = 0.$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lin. függő, ha $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$, a $0 = 0$ egyenletet bármely t megoldja.

* hiszen $t \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{0}$, bármely t-re nemtriviális megoldása az $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} = \vec{0}$ egyenletnek.

ez itt az eredeti verzió

4. (3+3+4 pont)

A) Legyen $\vec{n_1} = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T$, $\vec{n_2} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})^T$, $\vec{r} = (0,4)^T$. Ha $\vec{r} = \alpha_1\vec{n_1} + \alpha_2\vec{n_2}$ akkor mennyi α_1 es α_2 ?

Eredeti verzió: $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1$, tehát $\alpha_1\vec{n}_1 + \alpha_2\vec{n}_2 = (\alpha_1 - \alpha_2)\vec{n}_1 = \begin{bmatrix} (\alpha_1-\alpha_2)(-\frac{1}{\sqrt2}) \\ (\alpha_1-\alpha_2)(\frac{1}{\sqrt2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$,

de ez nem oldható meg $\alpha_{1,2}$-re, hiszen ekkor $\begin{matrix}\alpha_1-\alpha_2=0 \\ \alpha_1-\alpha_2=4\sqrt2\end{matrix}$, ellentmondás.

Ortogonális verzió: $\vec{n}_1 = (-\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2})^T$, $\vec{n}_2 = (\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2})^T$, ortonormált bázis, így

$$\alpha_1 = (\vec{n}_1, \vec{r}) = -\frac{1}{\sqrt2}\cdot 0 + \frac{1}{\sqrt2}\cdot 4 = 2\sqrt2$$
$$\alpha_2 = (\vec{n}_2, \vec{r}) = \frac{1}{\sqrt2}\cdot 0 + \frac{1}{\sqrt2}\cdot 4 = 2\sqrt2$$

, vagyis $(0,4) = 2\sqrt2\,\vec{n}_1 + 2\sqrt2\,\vec{n}_2$

B) Legyen $\bar{a} = (2,1,3)$, $\bar{b} = (2,0,4)$. Mennyi

- az $\bar{a}\bar{b}$ skalaris szorzat,

$$\vec{a}\vec{b} = 2\cdot 2 + 1\cdot 0 + 3\cdot 4 = 16$$

- az $\bar{a}$ és a $\bar{b}$ vektorok altal bezart szog koszinusza,

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{16}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}\cdot\sqrt{2^2+0^2+4^2}} = \frac{16}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{20}} = \frac{4\sqrt2}{\sqrt{35}}$$

- az $\bar{a}$ és a $\bar{b}$ oldalu haromszog terulete?

$$T_\Delta = T_{\vec{a},\vec{b}} = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$$

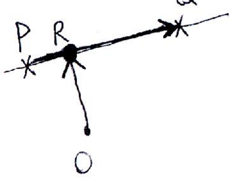
$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}\cdot\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\cdot\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\cdot\vec{k}$$
$$= (1\cdot4 - 3\cdot0)\vec{i} - (2\cdot4 - 3\cdot2)\vec{j} + (2\cdot0 - 1\cdot2)\vec{k} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$$
$$= (4,-2,-2)$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |(4,-2,-2)| = \sqrt{4^2+(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{24}$$

$$T_\Delta = \frac{\sqrt{24}}{2} = \sqrt6$$

C) Legyen $P = (3,0,0)$; $Q = (0,1,3)$. Ird fel a ket ponton atmeno egyenes parametrikus egyenletet! Mennyi az egyenes es az origo tavolsaga? Keresd meg az egyenes azon R pontjat, amelyik a legkozelebb van az origohoz!

$$\vec{v} = \vec{PQ} = Q - P = (-3,1,3) \qquad \vec{r}(t) = P + t\cdot\vec{v} = (3,0,0) + t\cdot(-3,1,3) =$$
$$= (3-3t,\ t,\ 3t)$$



$$\vec{OR} \perp \vec{PQ}$$

$$\vec{r}(t) \perp \vec{v}\ ,\ (\vec{v}, \vec{r}(t)) = 0 = -3(3-3t) + 1\cdot t + 3\cdot 3t = 19t - 9$$

tehát $t = 9/19$,

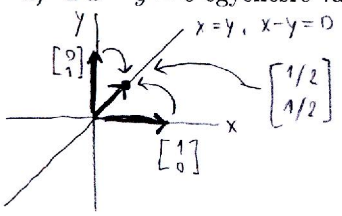
$$R = \vec{r}(9/19) = \left(3 - 3\cdot\frac{9}{19}, \frac{9}{19}, 3\cdot\frac{9}{19}\right) = \left(\frac{30}{19}, \frac{9}{19}, \frac{27}{19}\right)$$

Origó-egyenes távolság: $|\vec{OR}| = |\vec{r}(9/19)| = \left|\left(\frac{30}{19}, \frac{9}{19}, \frac{27}{19}\right)\right| = \frac{1}{19}\sqrt{30^2+9^2+27^2}$

2. ((1+1+2)+(2+2)+2 pont) Írd fel a következő transzformációk mátrixait, ha az $\mathbb{R}^2$ vektorteret ortonormált bázisban az $(x, y)^T$ vektorokkal koordinátázzuk!

A) $\mathbb{R}^2$-ben:

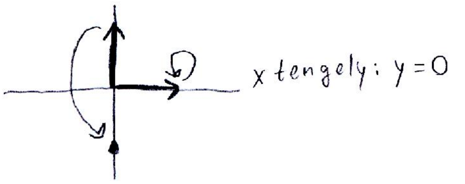
a) a $x - y = 0$ egyenesre való merőleges vetítés,



$$P\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix} \qquad P\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}1/2\\1/2\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1/2\\1/2\end{matrix}}\end{bmatrix}$$

b) az $y = 0$ egyenesre való merőleges tükrözés,



$$T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \qquad T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$$

c) az origón átmenő, az $(2, 3)^T$ vektorral párhuzamos egyenesre való merőleges vetítés,

$$\vec{V} = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{1}{\sqrt{2^2+3^2}}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2/\sqrt{13}\\3/\sqrt{13}\end{bmatrix}$$

$$P_{\vec{n}} = \vec{n}\,\vec{n}^T, \quad \text{hiszen} \quad P_{\vec{n}}\vec{r} = (\vec{n}, \vec{r})\cdot\vec{n} = \vec{n}\cdot(\vec{n}, \vec{r}) = \vec{n}\cdot\vec{n}^T\vec{r}$$

$$\text{tehát} \quad P_{\vec{n}} = \begin{bmatrix}2/\sqrt{13}\\3/\sqrt{13}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13}\end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix}2\cdot2 & 2\cdot3\\3\cdot2 & 3\cdot3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4/13 & 6/13\\6/13 & 9/13\end{bmatrix}$$

B)

1. Oldd meg u, v-re:

I. $\quad u - (1 - i)v = -1,$

II. $\quad iu - 2iv = 1 + i.$

$$i\cdot\text{I.} \quad iu - \overbrace{(1+i)}^{i\cdot(1-i)}v = -i$$

$$\text{II.} \quad iu - 2iv = 1+i$$

$$\text{II.} - i\cdot\text{I.} \quad (1-i)v = 1+2i$$

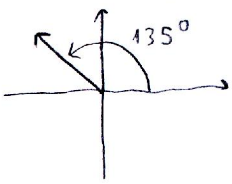
$$v = \frac{1+2i}{1-i} = \frac{1+2i}{1-i}\,\frac{1+i}{1+i} = \frac{-1+3i}{1^2+1^2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$\to \text{I.} \quad u - (1-i)\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right) = -1$$

$$u = -1 + (1-i)\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right) = -1 + (1+2i) = 2i$$

$$\text{Tehát} \quad u = 2i, \quad v = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

2. Mennyi $(-1 + i)^8$? Add meg a valaszt trigonometrikus es algebrai alakban is!



$$|-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$(-1+i) = \sqrt{2}\cdot(\cos 135^\circ + i\cdot\sin 135^\circ)$$

$$(-1+i)^8 = \sqrt{2}^8\cdot(\cos[8\cdot135^\circ] + i\cdot\sin[8\cdot135^\circ])$$

$$= 16\cdot(\cos 1080^\circ + i\sin 1080^\circ) =$$

$$= 16\cdot(\cos[0^\circ+3\cdot360^\circ] + i\cdot\sin[0^\circ+3\cdot360^\circ])$$

$$= 16\cdot(\cos 0^\circ + i\cdot\sin 0^\circ) = 16\cdot(1+0\cdot i) = 16$$

Ugyanez trükkösebben:

$$(-1+i)^2 = \underset{(-1)^2}{1} - 2i - \underset{i^2}{1} = -2i \longrightarrow (-1+i)^8 = \left[(-1+i)^2\right]^4 = [-2i]^4 = 2^4\cdot i^4 = 2^4\cdot1 = 16 = 16\cdot(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

3. (1+1+2+2+4 pont)
Adott öt pont

$$P = (0,2,0), \quad Q = (0,0,2), \quad R = (0,3,3), \quad S = (4,4,4), \quad T = (5,5,5)$$

az $\mathbb{R}^3$ Euklideszi vektortérben egy ortonormált bázisban.

a) Írd fel a S és T pontokat tartalmazó egyenes parametrikus egyenletét!

$$\vec{v} = \overrightarrow{ST} = T - S = (5,5,5) - (4,4,4) = (1,1,1)$$

$$\vec{r}(t) = S + t\vec{v} = (4,4,4) + t \cdot (1,1,1) = (4+t, 4+t, 4+t)$$

b) Írd fel a S és T pontokat tartalmazó egyenes algebrai egyenleteit!

$$\left.\begin{array}{l} x = 4+t \\ y = 4+t \\ z = 4+t \end{array}\right\} t = x-4 = y-4 = z-4 \quad \text{tehát} \quad \begin{array}{l} x-4 = y-4 \\ y-4 = z-4 \end{array} \quad \text{vagyis} \quad \begin{array}{l} x = y \\ y = z \end{array}$$

ugyanilyen jó pl.
$x = y$
$x = z$ is

c) Írd fel a a P, Q és R pontokat tartalmazó sík algebrai egyenletét!

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (0,-2,2)$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{PR} = R - P = (0,1,3)$$

a sík egy normálvektora:

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} \overbrace{\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}^{(-2)\cdot 3 - 2\cdot 1} - \vec{j} \overbrace{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}^{0} + \vec{k} \cdot \overbrace{\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}^{0} = -8\vec{i} = (-8,0,0)$$

alg. egyenlet: $\quad \vec{n}(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$

$$(-8,0,0) \cdot [(x,y,z) - (0,2,0)] = 0$$

$$(-8,0,0)(x-0, y-2, z-0) = 0$$

$$-8x = 0 \longrightarrow x = 0$$

(valóban, az x koordináta mindig nulla a P, Q, R pontokban)

d) Hol van a sík és az egyenes metszéspontja?

$$0 = x = 4+t \longrightarrow t = -4$$

metszéspont:

$$\vec{r}(t) = (4+(-4), 4+(-4), 4+(-4)) = (0,0,0)$$

e) Mennyi a sik es az origo tavolsaga? $\quad \text{távolság} = \left| \left(\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}, r_0 \right) \right| =$

$$= \left| \left(\frac{(-8,0,0)}{\sqrt{(-8)^2+0^2+0^2}}, (0,2,0) \right) \right| = \frac{1}{8}(-8\cdot 0 + 0\cdot 2 + 0\cdot 0) = 0,$$

ami nem túl meglepő, mivel a $(0,0,0)$ pont kétségkívül az $x=0$ síkban van.