PZh2, Lin.Alg., 2023.12.13. NEPTUN:

Aláírás:

Név:

1. (2+3+2+3 pont) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Keresd meg A sajatertekeit!

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(3-\lambda) - 2\cdot 2 = \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \implies \lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 1$$

Keresd meg A sajatvektorait!

$$\lambda_1 = 5: \quad A - 5E = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(A - 5\cdot E)\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} -2x + 2y &= 0 \\ 2x - 2y &= 0 \end{aligned}\right\} \to x = y$$

sajátaltér: $\left\{\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}\right\}$, $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\lambda_2 = 1: \quad A - 1\cdot E = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(A - 1\cdot E)\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2x + 2y = 0 \longrightarrow y = -x$$

sajátaltér: $\left\{\begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix}\right\}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Mennyi $A^{31}\,(6,8)^T$?

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \alpha + \beta &= 6 \\ \alpha - \beta &= 8 \end{aligned} \longrightarrow 2\alpha = 14 \to \alpha = 7, \quad \beta = -1$$

vagy $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$A^{31}\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = A^{31}(7\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = 7\cdot 5^{31}\cdot\vec{v}_1 - 1^{31}\cdot\vec{v}_2$$

$$= 7\cdot 5^{31}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Mennyi A^{31} ?

$$A = SDS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$A^{31} = SD^{31}S^{-1} = \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5^{31} & 0 \\ 0 & 1^{31} \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}}_{\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}}$$

Megjegyzés: Mivel A szimmetrikus, vagyis $A = A^T$, így létezik sajátvektorokból álló ortonormált bázisa. Érdemes $\vec{v}_{1,2}$-t ilyennek választani: $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Ekkor $S = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ ortogonális mátrix, így $S^{-1} = S^T$,

vagyis $S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

2. (6+4 pont) a) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Szamold ki pivotalassal (vagy maskeppen) A inverzet! Ellenorizd az eredmenyed!

	a_1	a_2	a_3	e_1	e_2	e_3
e_1	-1	2	0	1	0	0
e_2	$\boxed{1}$	1	0	0	1	0
e_3	0	0	1	0	0	1
e_1	0	-1	0	1	1	0
a_1	1	1	0	0	1	0
e_3	0	0	$\boxed{1}$	0	0	1
e_1	0	$\boxed{-1}$	0	1	1	0
a_1	1	1	0	0	1	0
a_3	0	0	1	0	0	1
a_2	0	1	0	-1	-1	0
a_1	1	0	0	1	2	0
a_3	0	0	1	0	0	1
a_1	1	0	0	1	2	0
a_2	0	1	0	-1	-1	0
a_3	0	0	1	0	0	1

Tehát $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Valóban:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Legyen

3. oszlop

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 3 & 1 & \boxed{0} & 0 \\ 1 & 0 & \boxed{0} & 1 \end{pmatrix}.$$ ← 2. sor

Mennyi $(A^{-1})_{32}$, ha az indexálás 1-nel kezdodik?

ez marad A-ból a 2. sor és a 3. oszlop törlése után

$$A^{-1}_{32} = \frac{(-1)^{3+2}}{\det A} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \left(2 \cdot \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}^{0} - 1 \cdot \overbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}^{-1} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = -1$$

Tehát $(A^{-1})_{32} = \frac{-1}{-1} \cdot 2 = 2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot |\because| + 0 \cdot |\because| = 2$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

3. ((2+3+1)+(2+2) pont)

a) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Keresd meg A sajatertekeit!

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - (-2)\cdot 0 = (5-\lambda)^2$$

$$\lambda_1 = 5$$

Keresd meg A sajatvektorait!

$$A - 5 \cdot E = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - 5 \cdot E)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$-2y = 0 \longrightarrow y = 0$$

Saját altér: $\left\{\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

Add meg az A sajatvektorai alkotott alter egy bazisat!

bázis: $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Ird fel azt a kilencismeretlenes egyenletrendszert, amit az $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ ismeretlenek kielegitenek!

$$A A^{-1} = E$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}}_{= \begin{bmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 3d & 3e & 3f \\ 4g & 4h & 4i \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$2a = 1 \quad 2b = 0 \quad 2c = 0$

$3d = 0 \quad 3e = 1 \quad 3f = 0$

$4g = 0 \quad 4h = 0 \quad 4i = 1$

Oldd meg ezeket az egyenleteket, vagyis szamold ki, hogy mennyi A^{-1} !

$a = \frac{1}{2}, \; e = \frac{1}{3}, \; i = \frac{1}{4}$

$b = c = d = f = g = h = 0$ Vagyis $\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} = A^{-1}$

4.A (6+(2+2) pont) Oldd meg pivotálással a kovetkezo egyenletrenszert! Adj meg egy partikularis megoldast! Adj meg egy bazisát a homogen egyenlet megoldasainak! Ird fel az altalanos megoldast!

$$4x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 6x_5 = 4$$
$$2x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 2$$
$$5x_3 - 5x_4 = 0.$$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b
e_1	4	2	-6	6	6	4
e_2	2	$\boxed{1}$	-3	3	3	2
e_3	0	0	5	-5	0	0
e_1	0	0	0	0	0	0
a_2	2	1	-3	3	3	2
e_3	0	0	$\boxed{5}$	-5	0	0
e_1	0	0	0	0	0	0
a_2	2	1	0	0	3	2
a_3	0	0	1	-1	0	0

triviális oszlopok:

hom. megold:

part. megold:

part. megold.:
$$\begin{array}{c|c} & b \\ e_1 & 0 \\ a_2 & \boxed{2} \\ a_3 & \boxed{0} \end{array} \longrightarrow \vec{X}_{part} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boxed{2} \\ \boxed{0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

hom. megold.:
$$\begin{array}{c|c} & a_1 \\ e_1 & 0 \\ a_2 & \boxed{2} \\ a_3 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & a_4 \\ e_1 & 0 \\ a_2 & \boxed{0} \\ a_3 & \boxed{-1} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & a_5 \\ e_1 & 0 \\ a_2 & \boxed{3} \\ a_3 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\vec{X}_{h_1} = \begin{bmatrix} \boxed{-1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{X}_{h_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boxed{0} \\ \boxed{-1} \\ \boxed{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{X}_{h_5} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boxed{3} \\ \boxed{0} \\ 0 \\ \boxed{-1} \end{bmatrix}$$

4. oszlop

a_2, a_3 címkék

$$\vec{X}_{ált} = \vec{X}_{part} + t_1 \vec{X}_{h_1} + t_4 \vec{X}_{h_4} + t_5 \vec{X}_{h_5}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

4.B.1

1. Legyen $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 2 - 2x_n$. Mennyi x_n ?

$$x_{fix} = 2 - 2x_{fix} \longrightarrow x_{fix} = \frac{2}{3}$$

$$x_n = (-2)^n \cdot \left(0 - \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}$$

x_0 $\quad$ x_{fix}

2. Legyen $x_0 = 13$, $x_{n+1} = 2x_n - 2$. Mennyi x_n ?

$$x_{fix} = 2x_{fix} - 2 \longrightarrow x_{fix} = 2$$

$$x_n = 2^n(13 - 2) + 2 = 2^n \cdot 11 + 2$$