PZh1, Lin.Alg., 2023 NEPTUN: Aláírás:

Név:

$(2+1+1)+4+2$

1. (~~(2+1+1)+(1+2)+2 pont~~)

A) Legyen $f:(x,y)^T \to (-y+2x,\ 3y-4x, x+y)^T$ és $g:(x,y,z)^T \to (z, 3y-2x)^T$.

a) Ird fel az f és g transzformációk F, G mátrixait!

$$f: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2x-y \\ -4x-3y \\ x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & +3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{tehát } F = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & +3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} z \\ -2x+3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{tehát } G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Abban az esetben, ha létezik, mennyi az $f \circ g$ transzformáció mátrixa?

$$FG = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & +3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -6 & +9 & -4 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Abban az esetben, ha létezik, mennyi az $g \circ f$ transzformáció mátrixa?

$$GF = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & +3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -16 & 11 \end{bmatrix}$$

B) a) Legyen $P=(8,0)$, $Q=(0,8)$. Melyek a konvex kombinacioi a P,Q pontoknak a kovetkezoek kozul es miert:

$$(2,6),\quad (0,8),\quad (8,8),\quad (-4,12).$$

$(2,6) = t\cdot(8,0) + (1-t)\cdot(0,8) = (8t, 8-8t) \longrightarrow$ $8t=2 \longrightarrow t=1/4$, $8-8t=6 \longrightarrow t=1/4$ egyenlőek, és $t\in[0,1]$, tehát $(2,6)$ konvex komb.

$(0,8) = t\cdot(8,0) + (1-t)\cdot(0,8) = (8t, 8-8t) \longrightarrow$ $8t=0 \longrightarrow t=0$, $8-8t=8 \longrightarrow t=0$ konvex komb.

$(8,8) = t\cdot(8,0) + (1-t)\cdot(0,8) = (8t, 8-8t) \longrightarrow$ $8t=8 \longrightarrow t=1$, $8-8t=8 \longrightarrow t=0$ nem egyenlőek, NEM konv. komb.

$(-4,12) = (8t, 8-8t) \longrightarrow$ $-4=8t \longrightarrow t=-1/2$, $12=8-8t \longrightarrow t=-1/2$ egyenlőek, de $-\frac{1}{2} \notin [0,1]$, így NEM konvex kombináció

c) Legyen $\vec{a}=(1,1,1)$, $\vec{b}=(2,t,2)$, $\vec{c}=(3,2,1)$. Mennyi lehet t, ha a harom vektor lineariasan fuggo? =

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ lin. függő $\Longleftrightarrow (\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & t & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 1\cdot\begin{vmatrix} t & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & t \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (t-4)-(-4)+(4-3t)$$

$$= -2t+4 = 0$$

Vagyis $t=2$

2+2+2+2+2

3. ([redacted]+[redacted]+2+2+[redacted] pont)
Adott öt pont

$$P = (0,2,0), \quad Q = (0,0,2), \quad R = (0,3,3), \quad S = (4,4,4), \quad T = (5,5,5)$$

az $\mathbb{R}^3$ Euklideszi vektortérben egy ortonormált bázisban.

a) Írd fel a S és T pontokat tartalmazó egyenes parametrikus egyenletét!

$$\vec{v} = T - S = (1,1,1)$$

$$\vec{r}(t) = S + t \cdot \vec{v} = (4+t,\ 4+t,\ 4+t)$$

b) Írd fel a S és T pontokat tartalmazó egyenes algebrai egyenleteit!

$$\left.\begin{matrix} x = 4+t \\ y = 4+t \\ z = 4+t \end{matrix}\right\} \quad t = x-4 = y-4 = z-4$$

vagyis az alg. egy. lehet pl. $\begin{matrix} x = y \\ y = z \end{matrix}$

c) Írd fel a a P, Q és R pontokat tartalmazó sík algebrai egyenletét!

$$\vec{a} = R - P = (0,1,3)$$
$$\vec{b} = Q - P = (0,-2,2)$$

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\overbrace{\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}^{\text{nulla}} + \vec{k}\overbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}}^{\text{nulla}}$$

$$= (1 \cdot 2 - 3 \cdot (-2))\vec{i} = 8\vec{i} = (8,0,0)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0$$

$$(8,0,0) \cdot (x-0,\ y-2,\ z-0) = 0 \longrightarrow 8(x-0) + 0 \cdot (y-2) + 0 \cdot (z-0) = 0$$

$$8x = 0 \quad \text{vagyis} \quad x = 0.$$

(ezt persze ki lehetett találni előre is, mivel a P,Q,R pontok x koordinátája mind 0.

d) Hol van a sík és az egyenes metszéspontja?

$$x = 0 \longrightarrow 4 + t = 0 \longrightarrow t = -4$$

metszéspont: $\vec{r}(-4) = (4+(-4),\ 4+(-4),\ 4+(-4)) = (0,0,0)$

e) Mennyi a sik es az origo tavolsaga?

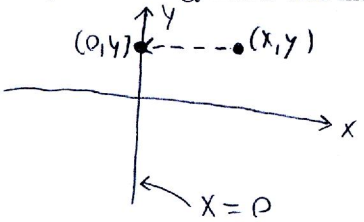
az $x = 0$ sík tartalmazza az origót, így a távolságuk nulla

$(1+3+1)+(3+2)$

2. ((~~1+1+2)+(2+2)+2~~ pont) Írd fel a következő transzformációk mátrixait, ha az $\mathbb{R}^2$ vektorteret ortonormált bázisban az $(x,y)^T$ vektorokkal koordinátázzuk!

A) $\mathbb{R}^2$-ben:

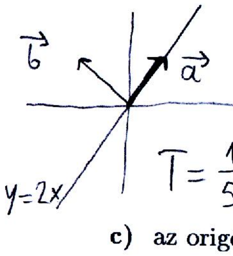
a) a $x=0$ egyenesre való merőleges vetítés,



$$P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0x+0y \\ 0x+1y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

vagy
$$P\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ P\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow P = \left[\ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}}\ \right]$$

b) az $y-2x=0$ egyenesre való merőleges tükrözés,



$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow{\vec{a}\perp\vec{b}}$ $\vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ortonormált rendszer.

ha $\vec{x} = \alpha_1\vec{n}_1 + \alpha_2\vec{n}_2$, akkor $T\vec{x} = \alpha_1\vec{n}_1 - \alpha_2\vec{n}_2$, mivel $\alpha_i = (\vec{n}_i, \vec{x})$, így $T\vec{x} = \vec{n}_1(\vec{n}_1,\vec{x}) - \vec{n}_2(\vec{n}_2,\vec{x})$, vagyis $T = \vec{n}_1\vec{n}_1^T - \vec{n}_2\vec{n}_2^T$

$$T = \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\right) \longrightarrow T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

c) az origón átmenő, az $(-4,5)^T$ vektorral párhuzamos egyenesre való merőleges vetítés,

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{(-4)^2+5^2}}\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{41}}\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$P_{\vec{n}} = \vec{n}\,\vec{n}^T = \frac{1}{41}\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{41}\begin{bmatrix} 16 & -20 \\ -20 & 25 \end{bmatrix}$$

B)

1. Oldd meg u, v-re:

I. $2u - iv = -1,$
II. $iu - 2v = 1 + i.$

$\text{I}' = i\,\text{I}.\quad 2iu + v = -i$
$\text{II}' = 2\,\text{II}.\quad 2iu - 4v = 2 + 2i$

$\text{I}' - \text{II}'\quad 5v = -2 - 3i$

$v = -\frac{2}{5} - \frac{3}{5}i$

I. $2u - i\left(-\frac{2}{5} - \frac{3}{5}i\right) = -1$

$2u = -1 + i\left(-\frac{2}{5} - \frac{3}{5}i\right)$
$= -\frac{2}{5} - \frac{2}{5}i$, $\quad u = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5}i$

tehát a megoldás:

$u = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5}i$

$v = -\frac{2}{5} - \frac{3}{5}i$

2. Mennyi $(1-i)^7$? Add meg a valaszt trigonometrikus es algebrai alakban is!

$$1 - i = \sqrt{1^2 + (-1)^2}\left(\cos(-45^\circ) + i\cdot\sin(-45^\circ)\right)$$
vagy 315°, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$

$$(1-i)^7 = \left(\sqrt{2}\right)^7\left(\cos(7\cdot(-45^\circ)) + i\cdot\sin(7\cdot(-45^\circ))\right) = 8\sqrt{2}\left(\cos(-315^\circ) + i\cdot\sin(-315^\circ)\right)$$
$$= 8\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\cdot\sin 45^\circ) = 8\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 8 + 8\cdot i$$

3+4+3

4. (~~3+3+4~~ pont)

A) Legyen $\vec{n_1} = (0,1)^T$, $\vec{n_2} = (1,1)^T$, $\vec{r} = (5,3)^T$. Ha $\vec{r} = \alpha_1\vec{n_1} + \alpha_2\vec{n_2}$ akkor mennyi α_1 es α_2 ?

$$\alpha_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix}\alpha_2 = 5\\ \alpha_1+\alpha_2 = 3\end{matrix} \longrightarrow \alpha_1 = -2, \text{ vagyis } \begin{matrix}\alpha_1 = -2\\ \alpha_2 = 5\end{matrix}$$

Másképpen:

$$\alpha_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\5\end{bmatrix}$$

Megjegyzés: mivel $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ nem alkot ortonormált bázist, $\alpha_{1,2} \neq (\vec{n}_{1,2}, \vec{r})$!

B) Legyen $\bar{a} = (2,1,4)$, $\bar{b} = (1,2,-4)$. Mennyi

- az $\bar{a}\bar{b}$ skalaris szorzat,

$$(2,1,4)\cdot(1,2,-4) = 2\cdot1 + 1\cdot2 + 4\cdot(-4) = -12$$

- az $\bar{a}$ és a $\bar{b}$ vektorok altal bezart szog koszinusza,

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{-12}{\sqrt{2^2+1^2+4^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-4)^2}} = \frac{-12}{\sqrt{21\cdot21}} = \frac{-12}{21} = -\frac{4}{7}$$

- igaz-e, hogy $\bar{a}$ és a $\bar{b}$ vektorok egy ~~teglelep~~ téglalap oldalait adjak meg, (ha igen, miert?)

Nem, mivel $\vec{a}$ NEM merőleges $\vec{b}$-re, hiszen $(\vec{a},\vec{b}) = -12 \neq 0$

- az $\bar{a}$ és a $\bar{b}$ oldalu haromszog terulete?

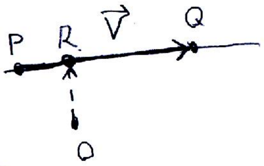
$$T_{\square} = |\vec{a}\times\vec{b}|, \quad T_{\Delta} = \frac{1}{2}T_{\square} \qquad T_{\Delta} = \frac{1}{2}\cdot|(-12,12,3)| = \frac{\sqrt{297}}{2}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&4\\1&2&-4\end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\begin{vmatrix}1&4\\2&-4\end{vmatrix} - \vec{j}\cdot\begin{vmatrix}2&4\\1&-4\end{vmatrix} + \vec{k}\cdot\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{-12}_{1\cdot(-4)-4\cdot2}\vec{i} + 12\vec{j} + 3\vec{k} = (-12,12,3)$$

C) Legyen $P = (3,0,0)$, $Q = (0,3,0)$. Ird fel a ket ponton atmeno egyenes parametrikus egyenletet! Mennyi az egyenes es az origo tavolsaga? Keresd meg az egyenes azon R pontjat, amelyik a legkozelebb van az origohoz!

$$\vec{V} = Q-P = (-3,3,0), \quad \vec{r}(t) = P + t\cdot\vec{V} = (3,0,0) + t\cdot(-3,3,0) = (3-3t, 3t, 0)$$



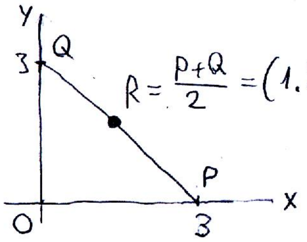
$$\vec{OR} \perp \vec{V} \longrightarrow (\vec{V},\vec{OR}) = 0 = \big((-3,3,0),(3-3t,3t,0)\big) =$$

$$= -3(3-3t) + 3\cdot3t + 0\cdot0 = -9 + 18t$$

tehát $t = \frac{1}{2}$, $R = \vec{r}(\frac{1}{2}) = (\frac{3}{2}; \frac{3}{2}, 0)$

$$d(\text{egyenes}, 0) = |\vec{OR}| = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Megjegyzés: Mindez könnyen kitalálható, mivel O, P, Q, R a $z=0$ síkban van:



$$R = \frac{P+Q}{2} = (1.5, 1.5)$$