Beadhato feladatok linearis algebrabol, 2023

1. Megjegyzesek

- A beadott feladatokra maximum 15% extra jutalom adhato, ehhez 4 feladat teljes megoldasa szukseges. Itt a "kulonallo" feladatok listaja:

$$2.(1-10),\quad 2.(11-18),\quad 3.,\quad 4.1,\quad 4.2,\quad 4.3,\quad 5.,\quad 6.1,\quad 6.2,\quad 6.3.1,\quad 6.3.2,\quad 6.3.3,\quad 6.4.$$

- A megoldasok benyujtasa kizarolag szemelyesen tortenhet, vagy a fogadooramon, vagy az utolso szerda delutani alkalommal.
- A javitasa a beadott feladatoknak abbol fog allni, hogy Onoknek el kell majd szemelyesen magyarazni nehany, a megoldasokbol szuroprobaszeruen kivalasztott reszt.
- Egy par a feladatokbol kisse tul sok numerikus szamitast tartalmaz, ezeket celszeru szamitogep segitsegevel megoldani, ezt a legcelszerubb valamilyen szimbolikus algebrai programcsomaggal vegrehajtani. Lasd errol az utolso 7 szekciot.

2. Szabalyos haromszog

Legyen $\vec{n}_0 = (1,0)^T$, tovabba legyen $\vec{n}_1$ es $\vec{n}_2$ ket olyan egysegvektor amelyek 120°, illetve 240° fokos szogeket zarnak be $\vec{n}_0$-lal.

1. Add meg $\vec{n}_1$-et es $\vec{n}_2$-ot!
2. Ird fel a harom komplex gyoket 1-nek!

Az $\vec{n}_i$, $i = 0,1,2$ vektorok altal megadott A, B, C pontok egy egyenlo oldalu $ABC\triangle$ haromszoget adnak meg.

3. Mekkora a $\triangle$ kerulete?
4. Mekkora a $\triangle$ terulete?

Az origo koruli $0°, 120°, 240°$ fokos elforgatasok a haromszoget onmagaba viszik at, vagyis permutaljak a haromszog csucsait. (Ezek a transzformaciok egy csoportnak nevezett algebrai strukturat alkotnak, ezt vizsgaljak a kovetkezo kerdesek.)

5. Add meg a $0°, 120°, 240°$ fokos elforgatasok R_0, R_1, R_2 matrixait!
6. Add meg a $0°, 120°, 240°$ fokos elforgatasokhoz tartozo π_0, π_1, π_2 permutacioit a csucsoknak!
7. Add meg az R_0, R_1, R_2 matrixok inverzeit! (Lehetoleg minel kevesebb szamitassal.)
8. Add meg a π_0, π_1, π_2 permutaciok inverzeit!
   Megjegyzes: Peldaul

$$\sigma = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} B & C & A \\ A & B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}.$$

9. Add meg az R_0, R_1, R_2 matrixok szorzotablajat, vagyis add meg a kovetkezo tablazat hianyzo elemeit! (Lehetoleg minel kevesebb szamitassal.)

	R_0	R_1	R_2
R_0	*	*	*
R_1	*	*	*
R_2	*	R_0	*

   Itt a megadott elem jelentese: $R_0 = R_2 R_1$.

10. Add meg az π_0, π_1, π_2 permutaciok szorzotablajat hasonlo modon!
    Megjegyzes: Hogyan szorozzunk ossze ket permutaciot? Peldaul

$$\sigma = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}, \qquad \text{akkor} \quad \sigma\rho = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix} \quad \text{hiszen,}$$

$$(\sigma\rho)(A) = \sigma(\rho(A)) = \sigma(B) = A,$$
$$(\sigma\rho)(B) = \sigma(\rho(B)) = \sigma(C) = C,$$
$$(\sigma\rho)(C) = \sigma(\rho(C)) = \sigma(A) = B.$$

11. Ird fel az origon es az A ponton athalado egyenesre valo meroleges tukrozes T_0 matrixat es add meg a hozzatartozo σ_0 permutaciojat a csucsoknak.

12. Ismeteld meg ugyanezt a B es C csucsokra is, a kapott eredmenyeket jelold T_1, T_2 illetve σ_1, σ_2-vel! Megjegyzes: Tobbfele megoldasi mod is lehetseges.

    a. Az $\vec{n}$ egysegvektor origon athalado egyenesere valo meroleges tukrozes hatasa

    $$T_{\vec{n}}\vec{r} = 2(\vec{n}, \vec{r})\vec{n} - \vec{r},$$

    ennek alapjan felirhato a tukrozes

    $$T_{\vec{n}} = 2\vec{n}\vec{n}^T - E$$

    matrixa. Rajzolj egy abrat ami ezt az egyenletet illusztralja!

    b. T_0 kiszamitasa remelhetoleg konnyu volt. Mennyi T_0R_i illetve R_iT_0, ha $i = 0, 1, 2$? Mi koze ezeknek T_0, T_1, T_2-hoz?

13. Ird fel a T_0, T_1, T_2 tukrozesek es a $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ permutaciok inverzeit!

14. Igaz-e, hogy T_1T_2 szinten egy tukrozes lesz?

15. Ird fel az $R_0, R_1, R_2, T_0, T_1, T_2$ matrixok szorzotablajat!

16. Ird fel a $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ permutaciok szorzotablajat!

A kovetkezo feladatok a konvex kombinacio fogalmat hasznalhatjak.

17. Rajta van-e az $ABC\triangle$ haromszogon a P pont, ha P

$$(0,0)^T, \ \ (-1,0)^T, \ \ (1,0)^T \ \ (0,1)^T \ \ (1/2,1/2)^T, \ \ (-1/4,1/2)^T.$$

18. Keresd meg a kovetkezo egyenesek es az $ABC\triangle$ haromszogon keruletenek a metszetet!

3. Szabalyos tetraeder

1. Vedd az elozo 2 feladatban kiszamolt $\vec{n}_i$, $n = 0, 1, 2$ vektorokat. Adj hozzajuk egy extra $z = 0$ koordinatat, igy harom darab haromdimenzios vektort kapunk, jeloljuk ezeket tovabra is $\vec{n}_i$-vel, a kapott pontokat pedig A, B, C-vel. Hol van az $\mathbb{R}^3$ terben az a D pont, amelyre teljesul, hogy

$$|\overline{AB}| = |\overline{DA}| = |\overline{DB}| = |\overline{DC}|,$$

   vagyis A, B, C, D egy szabalyos tetraeder csucsponjai. Hany ilyen D pont van? Ha tobb, hasznald azt, amelyiknek pozitiv a harmadik koordinataja! (Probald eloszor kitalalni D-nek az elso ket koordinatajat.)

2. Mekkora a tetraeder

    a. terfogata,

    b. felulete,

    c. elei hosszainak az osszege?

   Szamold ki a terfogatot ketfelekeppen: a vegyesszorzat segitsegevel, majd a kupokra vonatkozo $alapterulet \cdot magassag/3$ kepletet hasznalva!

3. Ellentetben a haromszoges feladattal, itt a tetraeder K kozeppontja nem az origoban van. Hanem hol?

4. Told el a koordinatarendszert ugy, hogy K az O origoba keruljon, majd szamold ujra az A, B, C, D pontok koordinatait az uj rendszerben! A tovabbiakban ezeket a koordinatakat hasznald!

5. Az OD egyenes koruli hany fokos elforgatas (esetleg tobb ilyen is lehet) viszi at a tetraedert onmagaba? Ird fel az ezekhez tartozo transzformaciok matrixait, illetve a hozzatartozo permutacioit a csucsoknak!

6. Adj meg egy olyan tukrozest, ami a tetredert onmagaba viszi at! Add mega megfelelo matrixot es permutaciot!

7. Oldd meg az elozo 2 feladat 5.-16. pontjainak a megfeleloit! Ezt persze csak viccbol kerdezem, a megoldas kisse hosszu lenne. Ehelyett szamold meg, hogy hanyfelekeppen lehet a tetraedert

    a. elforgatni,

    b. tukrozni

   ugy hogy onmagaba menjen at.

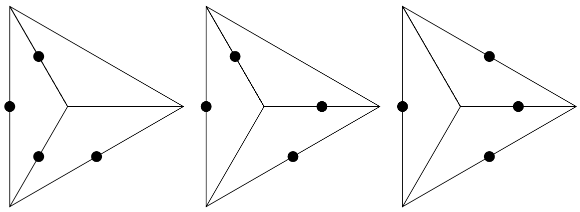
8. Hany pontban metszheti egy sik a tetraeder elhalozatat? Rajzolj abrakat, amelyek illusztraljak a lehetseges eseteket!

9. Hany pontban metszheti egy, az origot tartalmazo sik a tetraeder elhalozatat? Rajzolj abrakat, amelyek illusztraljak a lehetseges eseteket!

10. Keresd meg a $z = 1/2$ sik es a tetraeder elhalozatanak a metszetet!

11. Keresd meg a $x + y + z = 0$ sik es a tetraeder elhalozatanak a metszetet!

12. Az alabbi abrakon lathato szabalyos tetraederken mikor esik a negy bejelolt elfelezo pont egy sikba? Ugyanaz lenne-e a valasz, ha a tetraeder nem lenne szabalyos?



4. Gram-Schmidt eljárás

A Gram-Schmidt eljárás nehany vektor altal megadott alterben konstrualja meg egy ortonormalt bazisat az adott alternek.

4.1. Haromszog

A haromdimenzios $\mathbb{R}^3$ terben az

$$A = (1,0,0), \quad B = (0,1,0), \quad C = (0,0,1)$$

pontok ketsegkivul egy egyenlo oldalu haromszoget adnak meg. Az A, B, C pontok altal megadott sikon valassz egy olyan koordinatarenszert, amelynek az origoja a haromszog kozeppontjaban, a koordinatatengelyeket pedig ket, egymasra meroleges egysegvektor generalja. Ird fel az A, B, C pontok koordinatait ebben a ketdimenzios koordinatarendszerben!

1. Rajzold le ezt a felallast!

2. Keress ket, az ABC sikkal parhuzamos vektort. Legyen peldaul

$$\begin{aligned}
\vec{f}_1 &= \overrightarrow{AB}, \quad \vec{f}_2 = \overrightarrow{AC}, \\
\vec{n}_1 &= \frac{1}{|\vec{f}_1|}\vec{f}_1, \\
\vec{g}_2 &= \vec{f}_2 - (\vec{n}_1, \vec{f}_2)\vec{n}_1, \\
\vec{n}_2 &= \frac{1}{|\vec{g}_2|}\vec{g}_2.
\end{aligned}$$

   Szamold ki $\vec{n}_1$ es $\vec{n}_2$-t! Ellenorizd vagy bizonyitsd, hogy merolegesek egymasra!

3. Rajzoljegy olyan abrat, amelyik elmagyarazza az itt felsorolt lepeseket!

4. Az $\vec{n}_1$ es $\vec{n}_2$ segitsegevel ird fel a haromszog csucsainak a ketdimenzios koordinatait a feledat elejen leirt koordinatarendzserben!

4.2. Tetraeder

A negydimenzios $\mathbb{R}^4$ terben az

$$A = (1,0,0,0), \quad B = (0,1,0,0), \quad C = (0,0,1,0), \quad D = (0,0,0,1)$$

pontok ketsegkivul egy szabalyos tetraedert adnak meg. Ismeteld meg az elozo feladatot erre az esetre. Az egyetlen netrivialis valtoztatas az, hogy a Gram-Schmidt eljaras egy lepessel hosszabb lesz:

$$\begin{aligned}
\vec{f}_1 &= \overrightarrow{AB}, \quad \vec{f}_2 = \overrightarrow{AC}, \quad \vec{f}_3 = \overrightarrow{AD}, \\
\vec{n}_1 &= \frac{1}{|\vec{f}_1|}\vec{f}_1, \\
\vec{g}_2 &= \vec{f}_2 - (\vec{n}_1, \vec{f}_2)\vec{n}_1, \\
\vec{n}_2 &= \frac{1}{|\vec{g}_2|}\vec{g}_2, \\
\vec{g}_3 &= \vec{f}_3 - (\vec{n}_1, \vec{f}_3)\vec{n}_1 - (\vec{n}_2, \vec{f}_3)\vec{n}_2, \\
\vec{n}_3 &= \frac{1}{|\vec{g}_3|}\vec{g}_3.
\end{aligned}$$

4.3. Tengely koruli elforgatas

Ird fel az origon atmeno es $\vec{v} = (1,2,3)^T$ iranyu tengely koruli 20°-os elforgatas R_{20° matrixat!

1. Keress egy $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ vektorokbol allo ortonormalt bazist ahol $\vec{v}$ es $\vec{n}_1$ egy iranyba mutat! Ehhez alkalmazd a Gram-Schmidt eljarast a $\vec{v}$ es ket masik vektor, pl. $\vec{e}_1, \vec{e}_2$-re.

2. Ket dimenzioban a 20°-os elforgatast az

$$R_{20^\circ} = \begin{pmatrix} \cos 20^\circ & -\sin 20^\circ \\ \sin 20^\circ & \cos 20^\circ \end{pmatrix}$$

   matrix generalja. Ennek a hatasa a standard bazisvektorokon a kovetkezo:

$$\begin{aligned}
R_{20^\circ}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\cos 20^\circ\\ \sin 20^\circ\end{pmatrix} = R_{20^\circ}\vec{e}_1 = \cos 20^\circ \cdot \vec{e}_1 + \sin 20^\circ \cdot \vec{e}_2, \\
R_{20^\circ}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}-\sin 20^\circ\\ \cos 20^\circ\end{pmatrix} = R_{20^\circ}\vec{e}_2 = -\sin 20^\circ \cdot \vec{e}_1 + \cos 20^\circ \cdot \vec{e}_2.
\end{aligned}$$

Add meg a hatasat a haromdimenzios elforgatasnak az $\vec{n}_i$ bazisvektorokon a ketdimenzios esethez hasonloan. Vagyis mik alhatnak a kerdojelek helyen:

$$
\begin{aligned}
R_{20^\circ}\vec{n}_1 &= ?? \cdot \vec{n}_1 + ?? \cdot \vec{n}_2 + ?? \cdot \vec{n}_3,\\
R_{20^\circ}\vec{n}_2 &= ?? \cdot \vec{n}_1 + ?? \cdot \vec{n}_2 + ?? \cdot \vec{n}_3,\\
R_{20^\circ}\vec{n}_3 &= ?? \cdot \vec{n}_1 + ?? \cdot \vec{n}_2 + ?? \cdot \vec{n}_3,
\end{aligned}
$$

(Itt persze R_{20° mar egy 3×3 matrix. A kerdojelekbol osszerakhato matrixot jelojuk $\widetilde{R}_{20^\circ}$-kal. Itt a legkonnyebb kedes az, hogy mennyi $R_{20^\circ}\vec{n}_1$.)

3. Ha

$$R_{20^\circ}\left(\alpha_1\vec{n}_1 + \alpha_2\vec{n}_2 + \alpha_3\vec{n}_3\right) = \alpha_1'\vec{n}_1 + \alpha_2'\vec{n}_2 + \alpha_3'\vec{n}_3,$$

tovabba

$$\begin{pmatrix}\alpha_1'\\ \alpha_2'\\ \alpha_3'\end{pmatrix} = \widetilde{R}_{20^\circ}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix},$$

akkor mennyi $\widetilde{R}_{20^\circ}$?

4. Ha

$$x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = x_1'\vec{n}_1 + x_2'\vec{n}_2 + x_3'\vec{n}_3,$$

tovabba

$$\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\\ x_3'\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = S\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\\ x_3'\end{pmatrix}$$

akkor mennyi T es S ?

5. Eddig remelhetoleg sikerult megkonstrualni harom matrixot: $\widetilde{R}_{20^\circ}$, S, T. Ezek a kovetkezo transzformaciokat vegzik el:

   a. T atter az "e" bazisbol az "n" bazisba,
   b. S atter az "n" bazisbol az "e" bazisba,
   c. $\widetilde{R}_{20^\circ}$ elvegzi a tengely koruli elforgatast az "n" bazisban.

   Mindezek alapjan fel tudjuk irni R_{20°-t ezen harom matrix szorzatakent. Hogyan?

Megjegyzes: Ez a feladat egy peldaja a kovetkezo altalanos semanak:

a. Van egy "nehez" feladat, esetunkben R_{20° kiszamitasa.

b. Az elforgatas sokkal konnyebben kiszamithato az "n" koordinatarendszerben. Ezt vegezne el az $\widetilde{R}_{20^\circ}$ matrix.

c. Ezert

   i. eloszor atterunk az "n", vagyis a feladathoz adaptalt koordinatarendszerre,
   ii. itt a feladatot megoldja esetunkben az $\widetilde{R}_{20^\circ}$ matrix,
   iii. utana visszaterunk az eredeti "e" koordinatarenszerbe.

5. Linearis egyenletrendszerek megoldhatosaga

1. Az a es b parameterek milyen ertekeinel letezik a

$$(a)(x) = (b)$$

egyenletnek

   a. pontosan egy,
   b. vegtelen sok,
   c. nulla szamu

megoldasa?

2. Az a es b parameterek milyen ertekeinel letezik a

$$A\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ b\end{pmatrix}$$

egyenletnek

a. pontosan egy,

b. vegtelen sok,

c. nulla szamu

megoldasa, ha az A matrix:

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & a\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & a\end{pmatrix}.$$

3. Az a es b parameterek milyen ertekeinel letezik a

$$A\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ b\\ 1\end{pmatrix}$$

egyenletnek

a. pontosan egy,

b. vegtelen sok,

c. nulla szamu

megoldasa, ha az A matrix:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 3 & a\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & a\end{pmatrix}.$$

6. Matrixok megadasa, sajatrendszerek

6.1. Haromdimenzios transzformaciok

Az $\mathbb{R}^3$ Eukledeszi vektorterben az x, y, z koordinatakat, illetve az $\vec{e}_{1,2,3}$ standard bazist. hasznaljuk ebben a feladatban.

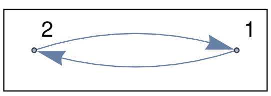
1. a. Ird fel az y tengelyre valo meroleges vetites matrixat!
   b. Mennyi $\vec{e}_2\vec{e}_2^T$?
   c. Ird fel az xz sikra valo meroleges vetites P_{xz} matrixat!
   d. Mennyi $\vec{e}_1\vec{e}_1^T + \vec{e}_3\vec{e}_3^T$?
   e. Ird fel az y tengelyre valo meroleges tukrozes matrixat!
   f. Ird fel az xz sikra valo meroleges tukrozes matrixat!
   g. Mennyi $2P_{xz} - E$?

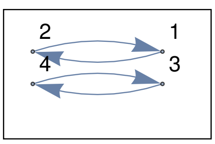
2. a. Ird fel az $x = z$ sikra valo meroleges vetites matrixat!
   b. Ird fel az $x = z$ sikra valo meroleges tukrozes matrixat!
   c. Ird fel az $x - z = 0$ sikra valo meroleges vetites matrixat!
   d. Ird fel az $x + z = 0$ sikra valo meroleges tukrozes matrixat!

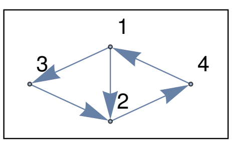
3. a. Ird fel a z tengely koruli 30°-os elforgatas matrixat! Itt persze el kell donteni, mi a pozitiv iranyu elforgatas. Ha viszont ez el lett dontve, az mar meghatarozza, hogy mi a pozitiv orientacio a masik ket tengely eseteben.
   b. Ird fel az x tengely koruli 30°-os elforgatas matrixat!
   c. Ird fel az y tengely koruli 30°-os elforgatas matrixat!

6.2. Sztochasztikus mátrixok

1. Vegyuk a kovetkezo weblap halozatokat, amelyek 2,4, illetve megint 4 lapbol allnak. Az abrakon lathato nyilak az egyik laprol mas lapokra mutato link-eket jelolik. Tegyuk fel, hogy a felhasznalok viselkedese a kovetkezo: Percenkent rakattintanak a lapon talalhato linkre, ha tobb is van, akkor veletlenszeruen, egyforma valoszinuseggel valasztanak kozuluk. Ha kezdetben a felhasznalok az elso esetben $(p_1, p_2)^T$, illetve a masodik es harmadik esetekben $(p_1, p_2, p_3, p_4)^T$ valoszinusegekkel valasztottak a kulonbozo lapokat, akkor mi lesz a valoszinuseg eloszlas 1 perc mulva? Add meg az idobeli evoluciot leiro matrixokat mindharom esetben.







2. Hogyan neznenek ki ezek a matrixok, ha a felhasznalok a kovetkezokeppen viselkednenek: Minden perc elteltevel 50% esellyel a lapon maradnak, 50% esellyel pedig az elozo pontban leirtak modjan rakattintanak egy linkre.

3. Milyen specialis jellemzoi vannak a sztochasztikus matrixoknak? Vizsgald meg az elemek lehetseges ertekeit, tovabba az egyazon sorban vagy oszlopban allo elemek osszegeit!

4. Egy S sztochasztikus matrixnak mindig van $\lambda = 1$ sajaterteku sajatvektora, ez adja meg az egyensulyi, vagyis az idoben allando valoszinusegeloszlasat a rendszernek

$$S\vec{p}_{egy} = \vec{p}_{egy}.$$

   Itt $\vec{p}_{egy}$ komponenseinek az osszege persze 1, ekkor adhat meg egy valoszinusegeloszlast. Tippeld meg, hogy a harom eset kozul melyekben egyertelmu $\vec{p}_{egy}$, vagyis mikor van csak egy egyensulyi allapot!

5. Szamold ki $\vec{p}_{egy}$-t mindharom esetben! Eloszor tegy igy az 1. pontban kapott matrixokkal, majd vegezd el ugyanezt a 2. pont matrixaival is! Ki tudod talalni a 2. ponthoz tartozo megoldasokat szamolas nelkul?

6. Az elso, ket lapbol allo halozat eseteben csak egy $\vec{p}_{egy}$ egyensulyi eloszlas van. Vajon igaz-e, hogy

$$\lim_{n\to\infty} S^n\vec{p} = \vec{p}_{egy}$$

   barmely $\vec{p}$ kezdeti valoszinusegeloszlas eseteben? Mi a valasz ha az S matrixot az 1. illetve 2. pont alapjan szamoljuk ki? Probald eloszor megtippelni a valaszt szamolas nelkul!

6.3. Fibonacci sorozatok

6.3.1.

Legyen

$$G_{n+1} = G_n + 6G_{n-1}, \quad G_0 = G_1 = 1.$$

Mennyi G_n ?

1. Keress olyan $g_n = q^n$ mertani sorozatokat, amelyek kielegitik G_n rekurziv szabalyat, vagyis

$$g_{n+1} = g_n + 6g_{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad q^{n+1} = q^n + q^{n-1}.$$

   Hany ilyen van?

2. Gyozd meg magad, hogy ha q_1^n es q_2^n ilyen sorozat, akkor ugyanez igaz $h_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n$-re is!

3. Keresd meg α, β-t, ha $h_0 = h_1 = 1$, az igy kapott h_n sorozat magadja G_n-t.

4. Legyen

$$\vec{G}(n) = \begin{pmatrix} G_n \\ G_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad \vec{G}(n+1) = A\vec{G}(n).$$

   Mennyi A ?

5. Keresd meg A-nak a $\lambda_{1,2}$ sajatertekeit! Mi kozuk van ezeknek az 1. pontban kapott q ertekekhez?

6. Ird fel A-nak ket fuggetlen $\vec{v}_{1,2}$ sajatvektorat, lehetoleg az $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ egyenlet explicit megoldasa nelkul!

7. Ird fel a kezdeti $\vec{G}(1)$ allapotot a $\vec{v}_{1,2}$ sajatvektorok linearis kombinaciojakent:

$$\vec{G}(1) = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2.$$

   Mennyi α, β ?

8. Mennyi $\vec{G}(n)$?

9. Ha

$$x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 = x_1'\vec{v}_1 + x_2'\vec{v}_2, \quad \text{es} \quad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix},$$

   akkor mennyi T es S ?

10. Ird fel A-t a T, S es a diagonalis

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

    matrixok szorzatakent!

11. Ird fel A^n-t a T, S es egy diagonalis matrix szorzatakent!

6.3.2.

Most modositjuk az elozo feladat rekurziv szabalyat:

$$G_{n+1} = G_n + 6G_{n-1} + 1, \quad G_0 = 1, \;\; G_1 = 2.$$

1. Ekkor

   $$\vec{G}(n) = \begin{pmatrix} G_n \\ G_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad \vec{G}(n+1) = A\vec{G}(n) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Keresd meg az

   $$\vec{x}(n+1) = A\vec{x}(n) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   dinamikai rendszer $\vec{x}_{fix}$ fixpontjat, vagyis old meg az

   $$\vec{x}_{fix} = A\vec{x}_{fix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   egyenletet!

2. Helyezd a koordinatrenszer origojat az $\vec{x}_{fix}$ pontba, azaz jellemezd a renszer allapotat a

   $$\overrightarrow{\Delta G}(n) = \vec{G}(n) - \vec{x}_{fix}$$

   vektorral. Mennyi $\overrightarrow{\Delta G}(1)$?

3. Ellenorizd, hogy

   $$\overrightarrow{\Delta G}(n+1) = A\,\overrightarrow{\Delta G}(n).$$

4. Mennyi $\overrightarrow{\Delta G}(n)$? (Ennek a kiszamitasahoz hasznald fel az elozo feladat eredmenyeit!)

5. Mennyi $\vec{G}(n)$?

6.3.3.

Ismeteld meg az elozo ket feladatot a klasszikus Fibonacci sorozatra, azaz szamold ki F_n-t, ha

1. $$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad F_0 = 1, \;\; F_1 = 1,$$

2. $$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} + 1, \quad F_0 = 1, \;\; F_1 = 2.$$

6.4. Kvantum kapuk

Megjegyzes: Kisse leegyszerusitve a dolgok allasat, a feladatban (helytelenul) valos Eukledeszi terben fogunk dolgozni a (helyes) complex Hilbert-ter helyett. Tovabbi informaciokert nezd meg ezt itt.

Egy m-qubit kvantum regiszter allapotat egy egysegvektor adja meg az $\mathbb{R}^{2^m}$ vektorterben, amelynek a standard ortonormalt bazisat az $|b_0 b_1 \dots b_m\rangle$ vekorok alkotjak, ahol b_i vagy 0 vagy 1. Tehat a bazisok 1,2,3 qubitek eseteben:

$$\begin{aligned}
1 \;\; qubit: &\quad |0\rangle\,, \;\; |1\rangle\,, \\
2 \;\; qubit: &\quad |00\rangle\,, \;\; |01\rangle\,, \;\; |10\rangle\,, \;\; |11\rangle\,, \\
3 \;\; qubit: &\quad |000\rangle\,, \;\; |001\rangle\,, \dots, |110\rangle\,, \;\; |111\rangle\,.
\end{aligned}$$

Kvantum operacionak nevezzuk az ortogonalis (azaz hosszmegorzo) linearis transzformaciokat. A kovetkezoekben hasznaljuk a kovetkezo jeloleseket:

$$\bar{b} = 1 - b, \;\; a \wedge b = \min(a,b), \;\; a \vee b = \max(a,b), \qquad a \oplus b = a + b, \text{ kiveve, hogy } 1 \oplus 1 = 0.$$

Ird fel a kovetkezo operaciok matrixait, es ellenorizd, hogy melyek adnak meg ortogonalis transzformaciokat, vagyis melyek tekinthetoek kvantum operacionak!

1. 1 qubit, NOT:

   $$NOT\,|0\rangle = |1\rangle\,, \quad NOT\,|1\rangle = |0\rangle\,,$$

2. 2 qubit, NOT_0, NOT_1, NOT_{01}:

   $$\begin{aligned}
   NOT_0\,|b_0 b_1\rangle &= \left|\bar{b}_0 b_1\right\rangle, \\
   NOT_1\,|b_0 b_1\rangle &= \left|b_0 \bar{b}_1\right\rangle, \\
   NOT_{01}\,|b_0 b_1\rangle &= \left|\bar{b}_0 \bar{b}_1\right\rangle.
   \end{aligned}$$

3. 1 qubit *Erase*:

$$Erase\,|b\rangle = |0\rangle\,.$$

4. Masold le a nulladik bitet az elso pozicioba.
   2 qubit *Clone*:

$$Clone\,|b_0 b_1\rangle = |b_0 b_0\rangle\,.$$

5. Masold le a nulladik bitet az elso pozicioba, feltelezve, hogy az elso pozicio allapota 0 volt kezdetben.
   2 qubit *QuantumClone*:

$$QuantumCopy\,|b_0 b_1\rangle = |b_0(b_0 \oplus b_1)\rangle\,.$$

6. 3 qubit *AND*:

$$AND\,|b_0 b_1 b_2\rangle = |b_0 b_1 (b_0 \wedge b_1)\rangle\,.$$

7. 3 qubit *QuantumAND*:

$$QuantumAND\,|b_0 b_1 b_2\rangle = |b_0 b_1((b_0 \wedge b_1) \oplus b_2)\rangle\,.$$

8. 3 qubit *AND*:

$$OR\,|b_0 b_1 b_2\rangle = |b_0 b_1 (b_0 \vee b_1)\rangle\,.$$

9. 3 qubit *QuantumAND*:

$$QuantumOR\,|b_0 b_1 b_2\rangle = |b_0 b_1((b_0 \vee b_1) \oplus b_2)\rangle\,.$$

9. 1 qubit Hadamard:

$$Hadamard\,|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right), \quad Hadamard\,|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |1\rangle\right).$$

Megjegyzes:

a. Az hasznalt elnevezesek nem standardak.

b. Az itt felsorolt konstrukciokban az $\oplus$ hasznalata arra szolgal, hogy az "eredmenyt" beirja az utolso bit poziciojaba, de ez irreverzibilisse (vissszafordithatatlanna) tenne az operaciot. Ezert a sima bemasolas helyett az utolso bit "erteke"

$$eredmeny\ \oplus\ (utolso\ bit)$$

lesz, ami a korrect eredmeny, ha az utolso bit 0 volt, vagyis az utolso bit egy meg soha fel nem hasznalt, 0 alapallapotu "friss" bit volt.

7. Komputer algebra rendszerek

A legnepszerubb rendszerek talan a Mathematica es a Matlab, ezek draga, kereskedelmi rendszere. A Matlab-nak az Octave rendszer egy eleg jo ingyenes klonja, mig a Mathematica-nak egy elegge limitalt, Mathics nevu klonja letezik.

A legteljesebb ingyenes rendszer a Sage, ezt ki lehet itt probalni. Illusztraciokent oldjuk meg a kovetkezo feladatot:

7.0.1.

Legyen

$$\vec{f_1} = (2,1,4), \quad \vec{f_2} = (4,1,2), \quad \vec{f_3} = (0,2,0).$$

Alkalmazd erre a harom vektorra a Gram-Schmidt eljarast 4.2.
Sage kod:

```
f1=vector([2,1,4])
f2=vector([4,1,2])
f3=vector([0,2,0])
f1norm=f1.norm()
n1=f1/f1norm
g2=f2-(f2.dot_product(n1))*n1
n2=g2/(g2.norm())
g3=f3-(f3.dot_product(n1))*n1-(f3.dot_product(n2))*n2
n3=g3/(g3.norm())
matrix([n1,n2,n3])
```

Eredmeny:

```
[      2/21*sqrt(21)       1/21*sqrt(21)       4/21*sqrt(21)]
[ 25/38*sqrt(38/21)   1/19*sqrt(38/21) -13/38*sqrt(38/21)]
[   -1/2*sqrt(2/19)        3*sqrt(2/19)    -1/2*sqrt(2/19)]
```

Itt az $\vec{n}_{1,2,3}$ vektorokat mint sorokat tartalmazza az eredmeny.