Zh2.B, Lin.Alg., 2022.11.31. NEPTUN: Aláírás:

Név:

1. (2+3+2+3 pont) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Keresd meg A sajatertekeit!

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda) - 0\cdot 4 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$$

Keresd meg A sajatvektorait!

$$(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$$

$\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$4x + 1y = 0$$

$$\longrightarrow y = -4x$$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 2$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-1x = 0, \; 4x = 0$$

$$\longrightarrow x = 0$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mennyi $A^{13}\,(6, 8)^T$?

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = 6, \quad 8 = (-4)\alpha_1 + \alpha_2 \longrightarrow \alpha_2 = 32$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = 6\vec{v}_1 + 32\vec{v}_2$$

$$A^{13}\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = 1^{13}\cdot 6 \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} + 2^{13}\cdot 32 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mennyi A^{13} ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = SDS^{-1}$$

$$A^{13} = SD^{13}S^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{13}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1^{13} & 0 \\ 0 & 2^{13} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

A csoport:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(4-\lambda) - 2\cdot 0$$

$$\longrightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 4$$

A

$\lambda_1 = 3$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2y = 0, \; 1y = 0$$

$$\longrightarrow y = 0$$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 4$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-1x + 2y = 0$$

$$\longrightarrow x = 2y$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_2 = 8, \quad 6 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \longrightarrow \alpha_1 = -10$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = -10\vec{v}_1 + 8\vec{v}_2$$

$$A^{13}\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = 3^{13}\cdot(-10)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4^{13}\cdot 8 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$A^{13} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3^{13} & 0 \\ 0 & 4^{13} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3^{13} & 0 \\ 0 & 4^{13} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. (4+2+4 pont) a) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Szamold ki pivotalassal (vagy maskeppen) A inverzet! Ellenorizd az eredmenyed!

Ez egy ortogonális (söt permutáció) mátrix, így inverze a transzponáltja: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

	a_1	a_2	a_3	e_1	e_2	e_3
e_1	0	0	1	1	0	0
e_2	$\boxed{1}$	0	0	0	1	0
e_3	0	1	0	0	0	1
e_1	0	0	1	1	0	0
a_1	1	0	0	0	1	0
e_3	0	$\boxed{1}$	0	0	0	1
e_1	0	0	$\boxed{1}$	1	0	0
a_1	1	0	0	0	1	0
a_2	0	1	0	0	0	1
a_3	0	0	1	1	0	0
a_1	1	0	0	0	1	0
a_2	0	1	0	0	0	1

$\longrightarrow$

	a_1	a_2	a_3	e_1	e_2	e_3
a_1	1	0	0	0	1	0
a_2	0	1	0	0	0	1
a_3	0	0	1	1	0	0

Inverz

A csoport:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Mennyi A^{-1} ?

A ortogonális, így $A^{-1} = A^T$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

A csoport:

$$A = \begin{bmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & 3/5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & 3/5 \end{bmatrix}$$

c) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A_{32}

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A_{23}

Mennyi $(A^{-1})_{23}$, ha az indexálás 1-nel kezdodik?

$$(A^{-1})_{23} = \frac{(-1)^{2+3}}{\det A} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} = 0$$

$=0$, a második, 0,0,0 sor miatt

Nulla részletes kiszámítása:

$$\det A = -0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot (-1) \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Megjegyzés: $\det A = -1 \neq 0$ kiszámítása lényeges, ennek hiányában nem biztos, hogy egyáltalán létezik A^{-1} !

A csoport:

$$(A^{-1})_{32} = \frac{(-1)^{3+2}}{\det A} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ \boxed{0 \;\; 0 \;\; 1} \end{vmatrix}}_{= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1}$$

utolsó sor szerinti kifejtés

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$(A^{-1})_{32} = \frac{-1}{-2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}$$

3. (5+5 pont)

a) Forgasd el a sikot az oramutato jarasaval ellenkezo iranyba $-45°$-kal a $P=(8,9)^T$ pont korul. Mik lesznek az $R=(7,8)^T$ pont uj koordinatai?

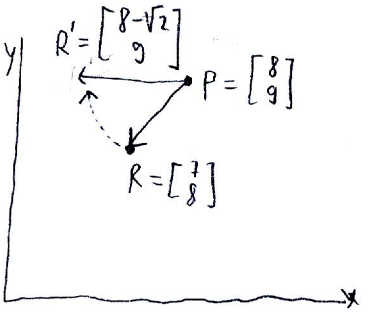
$$Rot_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}. \qquad R' = Rot_\alpha \cdot (R-P) + P$$

$\alpha = -45°$ $\quad \cos(-45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin(-45°) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$R' = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7-8 \\ 8-9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8-\sqrt{2} \\ 9 \end{bmatrix}$$

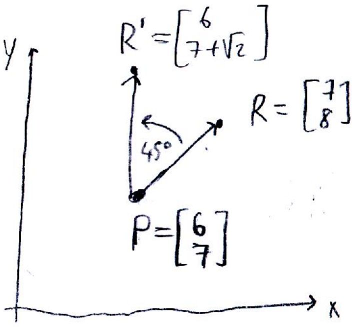


(A) csoport $\quad \alpha = +45°$

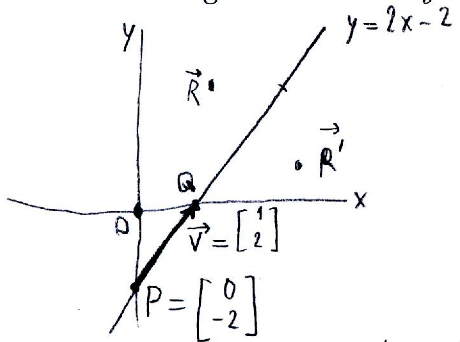
$$R' = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ +1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7-6 \\ 8-7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ +1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \\ 7+\sqrt{2} \end{bmatrix}$$



b) Tukrozd merolegesen a sikot az $y - 2x + 2 = 0$ egyenesre. Mik lesznek az $R=(7,8)^T$ pont uj koordinatai?



$P = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, mert $(-2) - 2 \cdot 0 + 2 = 0$

$Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, mert $(0) - 2 \cdot 1 + 2 = 0$

$\vec{V} = \vec{PQ} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \vec{V_0} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$T = 2\vec{V_0}\vec{V_0}^T - E = \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R' = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7-0 \\ 8-(-2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(A) csoport: $y = 2x + 2 \quad P = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \vec{V} = Q - P = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$T = 2\vec{V_0}\vec{V_0}^T - E = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R' = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7-0 \\ 8-2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4.A (6+(1+3) pont) Oldd meg pivotálással a kovetkezo egyenletrenszert! Adj meg egy partikularis megoldast! Adj meg egy bazisát a homogen egyenlet megoldasainak! Ird fel az altalanos megoldast!

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1$$
$$4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2$$
$$6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 3.$$

	a_1	a_2	a_3	a_4	b
e_1	2	$\boxed{1}$	-1	1	1
e_2	4	2	-1	1	2
e_3	6	3	-2	2	3
a_2	2	1	-1	1	1
e_2	0	0	$\boxed{1}$	-1	0
e_3	0	0	1	-1	0
a_2	2	1	0	0	1
a_3	0	0	1	-1	0
e_3	0	0	0	0	0

part. megold: "b" oszlop:

$\vec{b} = 1\cdot\vec{a}_2 = 0\vec{a}_1 + 1\vec{a}_2 + 0\vec{a}_3 + 0\vec{a}_4 \longrightarrow \vec{X}_{part} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$

hom. megold. I: "a_1" oszlop:

$\vec{a}_1 = 2\vec{a}_2 + 0\vec{a}_3 \longrightarrow$

$\longrightarrow \vec{0} = (-1)\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + 0\vec{a}_3 + 0\vec{a}_4 \longrightarrow \vec{X}^{I}_{hom} = \begin{bmatrix}-1\\2\\0\\0\end{bmatrix}$

hom. megold: II: "a_4" oszlop:

$\vec{a}_4 = 0\vec{a}_2 - 1\vec{a}_3 \longrightarrow \vec{0} = 0\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 - 1\vec{a}_3 + (-1)\vec{a}_4$

$\vec{X}^{II}_{hom} = \begin{bmatrix}0\\0\\-1\\-1\end{bmatrix}$

$\vec{X}_{ált} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} + t_I\begin{bmatrix}-1\\2\\0\\0\end{bmatrix} + t_{II}\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\-1\end{bmatrix}$

4.B.1

1. Legyen $x_0 = 123$, $x_{n+1} = 12x_n$. Mennyi x_n ?

Mértani sor:

$x_n = 12^n \cdot x_0 = 12^n \cdot 123$

2. Legyen $x_0 = 123$, $x_{n+1} = 4x_n - 12$. Mennyi x_n ?

Fixpont: $x_{fix} = 4x_{fix} - 12 \longrightarrow x_{fix} = 4$

$x_n = 4^n(123 - 4) + 4 = 4^n \cdot 119 + 4$

A csoport

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1$$
$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3$$
$$3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2$$

	a_1	a_2	a_3	a_4	b
e_1	$\boxed{1}$	1	-1	1	1
e_2	4	2	-3	2	3
e_3	3	1	-2	1	2
a_1	1	1	-1	1	1
e_2	0	-2	$\boxed{1}$	-2	-1
e_3	0	-2	1	-2	-1
a_1	1	-1	0	-1	0
a_3	0	-2	1	-2	-1
e_3	0	0	0	0	0

part. megold: "b" oszlop:

$\vec{b} = 0\vec{a}_1 - 1\vec{a}_3 = 0\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 - 1\vec{a}_3 + 0\vec{a}_4$

$X_{part} = \begin{bmatrix}0\\0\\-1\\0\end{bmatrix}$

hom. megold. I: "a_2" oszlop:

$\vec{a}_2 = -1\vec{a}_1 - 2\vec{a}_3 \longrightarrow$

$\longrightarrow \vec{0} = -1\vec{a}_1 + (-1)\vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 + 0\vec{a}_4$

$\vec{X}^{I}_{hom} = \begin{bmatrix}-1\\-1\\-2\\0\end{bmatrix}$

hom. megold. II: "a_4" oszlop:

$\vec{a}_4 = -1\vec{a}_1 - 2\vec{a}_3 \longrightarrow$

$\longrightarrow \vec{0} = -1\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 + (-1)\vec{a}_4$

$X^{II}_{hom} = \begin{bmatrix}-1\\0\\-2\\-1\end{bmatrix}$

$X_{ált} = \begin{bmatrix}0\\0\\-1\\0\end{bmatrix} + t_I\begin{bmatrix}-1\\-1\\-2\\0\end{bmatrix} + t_{II}\begin{bmatrix}-1\\0\\-2\\-1\end{bmatrix}$

A

$x_{n+1} = x_n + 12, \quad x_0 = 123$

Számtani sor: $x_n = 123 + n \cdot 12$

$x_{n+1} = 3x_n + 12, \quad x_0 = 123$

Fixpont: $x_{fix} = 3x_{fix} + 12$

$\longrightarrow x_{fix} = -6$

$x_n = 3^n(123 - (-6)) + (-6)$

$= 3^n \cdot 129 - 6$