B Zh1, Lin.Alg., 2022 NEPTUN: Aláírás:

Név:

1. ((2+1+1)+(1+2)+2 pont)

A) Legyen $f : \big((x,y,z)^T\big) \to (y+2x+z,\ 3y-4x)^T$ és $g : \big((x,y)^T\big) \to (x,\ y-x,\ y)^T$.

a) Ird fel az f és g transzformációk F, G mátrixait!

$$f\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2x+1y+1z\\-4x+3y+0z\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}2&1&1\\-4&3&0\end{bmatrix}}_{F}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

$$g\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1x+0y\\-1x+1y\\0x+1y\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\\0&1\end{bmatrix}}_{G}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

b) Abban az esetben, ha létezik, mennyi az $f\circ g$ transzformáció mátrixa?

$$FG=\begin{bmatrix}2&1&1\\-4&3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\-7&3\end{bmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}\mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^3 \arrow[l, "f"', "F"] = \mathbb{R}^3 & \mathbb{R}^2 \arrow[l, "g"', "G"] \arrow[lll, bend left, "f\circ g"', "FG"]\end{tikzcd}$$

c) Abban az esetben, ha létezik, mennyi az $g\circ f$ transzformáció mátrixa?

$$GF=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&1\\-4&3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&1\\-6&2&-1\\-4&3&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}\mathbb{R}^3 & \mathbb{R}^2 \arrow[l, "g"', "G"] = \mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^3 \arrow[l, "f"', "F"] \arrow[lll, bend left, "g\circ f"', "GF"]\end{tikzcd}$$

B) Legyen

$$A=\begin{pmatrix}1&-4\\0&-1\\2&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0\\1&3\end{pmatrix}.$$

a) Abban az esetben, ha létezik, mennyi $(AB+A)$?

$$\begin{bmatrix}1&-4\\0&-1\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-4\\0&-1\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&-12\\-1&-3\\+3&+9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-4\\0&-1\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&-16\\-1&-4\\5&12\end{bmatrix}$$

b) Abban az esetben, ha létezik, mennyi $(E+B)A+2A$?

nem létezik:

$$\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\1&3\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1&-4\\0&-1\\2&3\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1&-4\\0&-1\\2&+3\end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}0&0\\1&3\end{bmatrix}}_{2\text{ széles}}\begin{bmatrix}1&-4\\0&-1\\1&3\end{bmatrix}\ \text{három magas}\qquad 2\neq 3$$

C) Legyen $\vec a=(1,t,t)$, $\vec b=(0,2,1)$, $\vec c=(1,0,1)$. Mennyi t, ha a harom vektor lineariasan fuggo? =

$\vec a,\vec b,\vec c$ lin. függő $\iff \vec a\vec b\vec c=0$

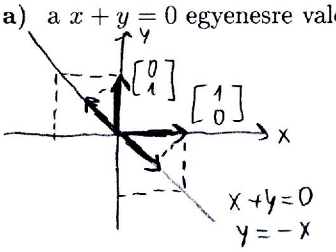
$$\vec a\vec b\vec c=\begin{bmatrix}1&t&t\\0&2&1\\1&0&1\end{bmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}2&1\\0&1\end{vmatrix}-t\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}+t\begin{vmatrix}0&2\\1&0\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot(2\cdot1-1\cdot0)-t\cdot(0\cdot1-1\cdot1)+t(0\cdot0-2\cdot1)=-t+2=0\Leftarrow t=2$$

2. ((1+1+2)+(2+2)+2 pont) Írd fel a következő transzformációk mátrixait, ha az $\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3$ vektortereket ortonormált bázisokban az $(x,y)^T$ es az $(x,y,z)^T$ vektorokkal koordinátázzuk!

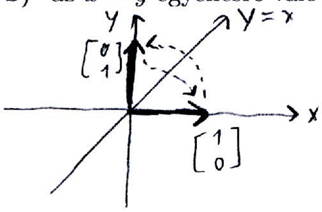
A) $\mathbb{R}^2$-ben:

a) a $x+y=0$ egyenesre való merőleges vetítés,



$$P\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2\\-1/2\end{bmatrix} \qquad P\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/2\\1/2\end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad P=\begin{bmatrix}1/2 & -1/2\\-1/2 & 1/2\end{bmatrix}$$

b) az $x=y$ egyenesre való merőleges tükrözés,



$$T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \qquad T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \qquad T=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

c) az origón átmenő, az $(1,2)^T$ vektorral párhuzamos egyenesre való merőleges vetítés,

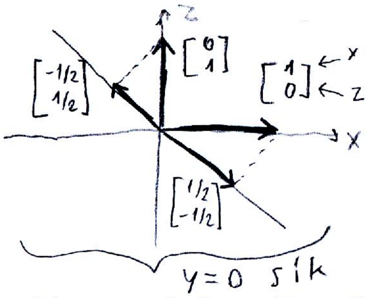
$\vec{V}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ $\quad \vec{V}_0$ egységvektor: $\vec{V}_0=\frac{1}{|\vec{V}|}\vec{V}=\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

vetítés mátrixa:

$$P_{\vec{V}_0}=\vec{V}_0\vec{V}_0^T=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{bmatrix}$$

B) $\mathbb{R}^3$-ben:

a) az $z+x=0$ síkra való merőleges vetítés,



$$P_{xz}=\begin{bmatrix}1/2 & -1/2\\-1/2 & 1/2\end{bmatrix} \qquad P_{3dim}=\begin{bmatrix}1/2 & 0 & -1/2\\0 & 1 & 0\\-1/2 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$$

$$P_{3dim}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2\\0\\-1/2\end{bmatrix}$$

vagy

$$P_{3dim}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/2\\0\\1/2\end{bmatrix} \qquad P_{3dim}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

b) az $z=0$ síkra való merőleges tükrözés,

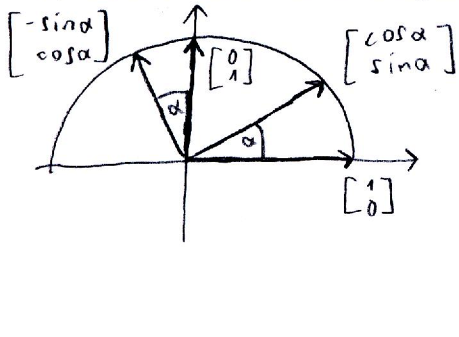
$$\left.\begin{aligned}T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\\ T\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}$$

hiszem ezek a vektorok benne vannak a z=0 "tükörben"

$$\text{így } T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

Továbbá $T\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=T\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$

C) Ird fel a sikbeli $-45°$-os elforgatas matrixat!



$$R_\alpha=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

$$R_{-45°}=\begin{bmatrix}\cos(-45°) & -\sin(-45°)\\\sin(45°) & \cos(45°)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

3. (1+1+2+2+4 pont)
Adott öt pont

$$P = (0,2,0),\quad Q = (0,0,2),\quad R = (-2,0,0),\quad S = (4,4,4),\quad T = (5,5,5)$$

az $\mathbb{R}^3$ Euklideszi vektortérben egy ortonormált bázisban.

a) Írd fel a S és T pontokat tartalmazó egyenes parametrikus egyenletét!

$\vec{v} = \vec{ST} = (5,5,5) - (4,4,4) = (1,1,1)$

$\vec{r}(t) = S + t\vec{v} = (4,4,4) + t\,(1,1,1) = (4+t, 4+t, 4+t)$

b) Írd fel a S és T pontokat tartalmazó egyenes algebrai egyenleteit!

$(x,y,z) = (4+t, 4+t, 4+t)$

$t = \frac{x-4}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-4}{1}$

alg. egy.: $\frac{x-4}{1} = \frac{y-4}{1} \longrightarrow 1x - 1y + 0z = 0$

$\frac{y-4}{1} = \frac{z-4}{1} \longrightarrow 0x + 1y + 1z = 0$

c) Írd fel a a P, Q és R pontokat tartalmazó sík algebrai egyenletét!

$\vec{a} = \vec{PQ} = (0,-2,2)$

$\vec{b} = \vec{PR} = (-2,-2,0)$

$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}$

$= 4\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k} = (4,-4,-4)$

$\vec{n}\,(\vec{r} - P) = 0$

$4(x-0) - 4(y-2) - 4(z-0) = 0$

$4x - 4y - 4z + 8 = 0$ vagy pl. $x - y - z + 2 = 0$

d) Hol van a sík és az egyenes metszéspontja?

$(x,y,z) = (4+t, 4+t, 4+t)$

$(4+t) - (4+t) - (4+t) + 2 = 0$

$-t - 2 = 0$

$t = -2$

Metszéspont:

$\vec{r}(-2) = (4+(-2), 4+(-2), 4+(-2)) = (2,2,2)$

e) Mennyi a P, Q, R, S pontok altal kifeszitett tetraeder terfogata?

$\vec{a} = \vec{PQ} = (0,-2,2)$

$\vec{b} = \vec{PR} = (-2,-2,0)$

$\vec{c} = \vec{PS} = (4,2,4)$

$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - (-2)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 2\underbrace{\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}_{(-2)\cdot 4 - 0 \cdot 4 = -8}$

$= 0\cdot(-8) - (-2)(-8) + 2\cdot 4 = -8$

$\text{Térfogat}_{\triangle} = \frac{1}{6}\left|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right| = \frac{1}{6}\cdot|-8| = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

4. (3+3+4 pont)

A) Legyen $\vec{n_1} = (-1/2, -\sqrt{3}/2)^T$, $\vec{n_2} = (-\sqrt{3}/2, 1/2)^T$, $\vec{r} = (5, 15)^T$. Ha $\vec{r} = \alpha_1 \vec{n_1} + \alpha_2 \vec{n_2}$ akkor mennyi α_1 es α_2 ?

$$(\vec{n}_1, \vec{r}) = (\vec{n}_1, \alpha_1 \vec{n}_1 + \alpha_2 \vec{n}_2) = \alpha_1 \underbrace{(\vec{n}_1, \vec{n}_1)}_{=1} + \alpha_2 \underbrace{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}_{=0} = \alpha_1 \ , \ (\vec{n}_2, \vec{r}) = \alpha_2$$

$$\alpha_1 = (\vec{n}_1, \vec{r}) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 5 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 15$$

$$\alpha_2 = (\vec{n}_2, \vec{r}) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 15$$

B) Legyen $\bar{a} = (1, 1, -3)$, $\bar{b} = (2, 3, -4)$. Mennyi

- az $\bar{a}\bar{b}$ skalaris szorzat,

$$\vec{a}\vec{b} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + (-3) \cdot (-4) = +17$$

- az $\bar{a}$ és a $\bar{b}$ vektorok altal bezart szog koszinusza,

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{+17}{\sqrt{1^2+1^2+3^2} \cdot \sqrt{2^2+3^2+4^2}} = \frac{+17}{\sqrt{11 \cdot 29}} = \frac{+17}{\sqrt{319}}$$

- az $\bar{a}$ és a $\bar{b}$ oldalu haromszog terulete?

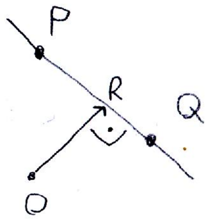
$$\text{Terület}_\Delta = \frac{1}{2} \text{Terület}_{\square} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(1 \cdot (-4) - (-3) \cdot 3) - \vec{j}(1 \cdot (-4) - (-3) \cdot 2) + \vec{k}(1 \cdot 3 - 1 \cdot 2)$$

$$\text{Terület}_\Delta = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \sqrt{5^2 + (-2)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{30}}{2} \qquad = (5, -2, 1)$$

C) Legyen $P = (3, 3, 0)$, $Q = (2, 1, 3)$. Ird fel a ket ponton atmeno egyenes parametrikus egyenletet! Keresd meg az egyenes azon R pontjat, amelyre $\vec{PQ} \perp \vec{OR}$!



$$\vec{v} = \vec{PQ} = [(2,1,3) - (3,3,0)] = (-1, -2, 3)$$

$$\vec{r}(t) = P + t\vec{v} = (3,3,0) + t(-1,-2,3) = (3-t, 3-2t, 3t)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{OR} \perp \vec{PQ} \iff \vec{r}(t) \perp \vec{v} \iff (\vec{r}(t), \vec{v}) = 0$$

$$(\vec{r}(t), \vec{v}) = (3-t) \cdot (-1) + (3-2t) \cdot (-2) + (3t) \cdot 3 =$$

$$= 14t - 9 = 0 \longrightarrow t = \frac{9}{14}$$

$$R = \vec{r}\left(\frac{9}{14}\right) = \left(3 - \frac{9}{14}, 3 - 2 \cdot \frac{9}{14}, 3 \cdot \frac{9}{14}\right) = \left(\frac{33}{14}, \frac{24}{14}, \frac{27}{14}\right)$$