A Zh1, Lin.Alg., 2022 NEPTUN: Aláírás:

Név:

1. ((2+1+1)+(1+2)+2 pont)

A) Legyen $f : ((x,y)^T) \to (y+2x,\ 3y-4x,\ 5x+6y)^T$ és $g : ((x,y)^T) \to (x,\ y-x)^T$.

a) Ird fel az f és g transzformációk F, G mátrixait!

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x+1y \\ -4x+3y \\ 5x+6y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}}_{F} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$g\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1x+0y \\ -1x+1y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{G} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

b) Abban az esetben, ha létezik, mennyi az $f \circ g$ transzformáció mátrixa?

$$FG = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{R}^3 \xleftarrow[F]{f} \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \xleftarrow[G]{g} \mathbb{R}^2$$

$f \circ g$

FG

c) Abban az esetben, ha létezik, mennyi az $g \circ f$ transzformáció mátrixa?

$$GF = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

oszlop magassága $=3$

sor hossza $=2$

$2 \neq 3$, nem létezik a szorzat

$$\mathbb{R}^2 \xleftarrow[F]{g} \mathbb{R}^2 \neq \mathbb{R}^3 \xleftarrow[F]{f} \mathbb{R}^2$$

$g \circ f$, GF nem létezik

B) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Abban az esetben, ha létezik, mennyi $(AB + A)$?

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 16 \\ 1 & 4 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

b) Abban az esetben, ha létezik, mennyi $(E + B)A + 2A$?

nem létezik: $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ 3 magas

2 széles

$2 \neq 3$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

C) Legyen $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (0,t,1)$, $\vec{c} = (1,0,1)$. Mennyi t, ha a harom vektor lineariasan fuggo? =

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lin. függő $\iff \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$

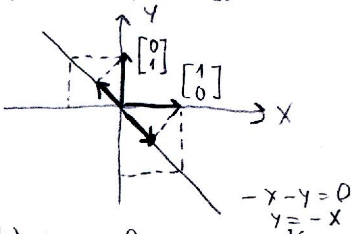
$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} t & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & t \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (t \cdot 1 - 0 \cdot 1) - 2(0 \cdot 1 - 1 \cdot 1) + 3(0 \cdot 0 - t \cdot 1)$$

$$= -2t + 2 = 0 \iff t = 1$$

2. ((1+1+2)+(2+2)+2 pont) Írd fel a következő transzformációk mátrixait, ha az $\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3$ vektortereket ortonormált bázisokban az $(x,y)^T$ es az $(x,y,z)^T$ vektorokkal koordinátázzuk!

A) $\mathbb{R}^2$-ben:

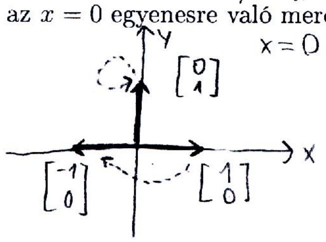
a) a $-x-y=0$ egyenesre való merőleges vetítés,



$$P\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2\\-1/2\end{bmatrix} \qquad P\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/2\\1/2\end{bmatrix} \Bigg\} \longrightarrow P=\begin{bmatrix}1/2 & -1/2\\-1/2 & 1/2\end{bmatrix}$$

b) az $x=0$ egyenesre való merőleges tükrözés,

$x=0 \Leftrightarrow$ y-tengely



$$T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix} \qquad T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \qquad T=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

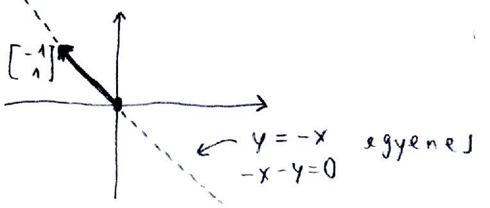
c) az origón átmenő, az $(-1,1)^T$ vektorral párhuzamos egyenesre való merőleges vetítés,

$\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ irányú egységvektor: $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\vec{n}_0$

vetítés mátrixa:

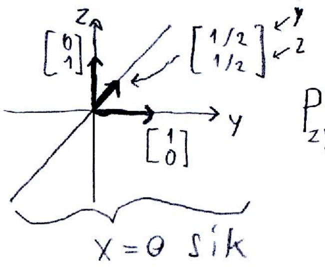
$$P_n=n_0n_0^T=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}=$$
$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

Ez ugyanaz, mint 2.A.a megoldása;



B) $\mathbb{R}^3$-ben:

a) az $z-y=0$ síkra való merőleges vetítés,



$$P_{zy}=\begin{array}{c}\begin{array}{cc} y & z\end{array}\\ \begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\1/2 & 1/2\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}-y\\-z\end{array} \qquad P_{3dim}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1/2 & 1/2\\0 & 1/2 & 1/2\end{bmatrix}$$

vagy

$$P_{3dim}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \qquad P_{3dim}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1/2\\1/2\end{bmatrix} \qquad P_{3dim}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1/2\\1/2\end{bmatrix}$$

b) az $y=0$ síkra való merőleges tükrözés,

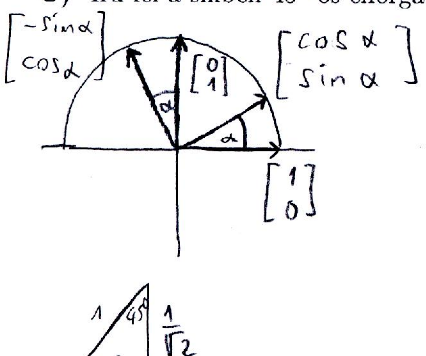
$$T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \qquad T\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

hiszen ezek a vetoroknak nulla az y koordinátája

Továbbá $T\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=T\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}$

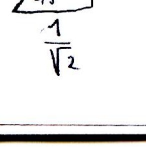
így $T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

C) Ird fel a sikbeli 45°-os elforgatas matrixat!



$$R_\alpha=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

$$R_{45°}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$



3. (1+1+2+2+4 pont)
Adott öt pont

$$P = (0,2,0), \quad Q = (0,0,2), \quad R = (0,3,3), \quad S = (4,4,4), \quad T = (5,5,5)$$

az $\mathbb{R}^3$ Euklideszi vektortérben egy ortonormált bázisban.

a) Írd fel a S és T pontokat tartalmazó egyenes parametrikus egyenletét!

$$\vec{v} = \overrightarrow{ST} = (5,5,5) - (4,4,4) = (1,1,1)$$

$$\vec{r}(t) = S + t\vec{v} = (4,4,4) + t(1,1,1) =$$
$$= (4+t, 4+t, 4+t)$$

b) Írd fel a S és T pontokat tartalmazó egyenes algebrai egyenleteit!

$$(x,y,z) = (4+t, 4+t, 4+t)$$

$$t = \frac{x-4}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-4}{1}$$

alg. egy.: $\frac{x-4}{1} = \frac{y-4}{1} \longrightarrow 1x - 1y + 0z = 0$

$\frac{y-4}{1} = \frac{z-4}{1} \longrightarrow 0x + 1y + 1z = 0$

c) Írd fel a a P, Q és R pontokat tartalmazó sík algebrai egyenletét!

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = (0,-2,2)$$
$$\vec{b} = \overrightarrow{PR} = (0,1,3)$$

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j}\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}_{=0} + \vec{k}\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}_{=0}$$

$$= -8\vec{i} = (-8,0,0)$$

$$\vec{n}(\vec{r} - P) = 0$$

$$-8(x-0) + 0\cdot(y-2) + 0\cdot(z-0) = 0$$

$$-8x = 0 \longrightarrow x = 0$$

d) Hol van a sík és az egyenes metszéspontja?

$$(x,y,z) = (4+t, 4+t, 4+t)$$

$$-8([4+t]-0) + 0([4+t]-2) + 0([z-0]) = 0$$

$$-32 - 8t = 0,$$
$$t = -4$$

Metszéspont:

$$\vec{r}(-4) = (4+(-4), 4+(-4), 4+(-4)) = (0,0,0)$$

e) Mennyi a P, Q, R, S pontok altal kifeszitett tetraeder terfogata?

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = (0,-2,2)$$
$$\vec{b} = \overrightarrow{PR} = (0,1,3)$$
$$\vec{c} = \overrightarrow{PS} = (4,2,4)$$

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} \boxed{0^{+} \;\; -2^{-} \;\; 2^{+}} \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - (-2)\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}_{0\cdot 4 - 3\cdot 4 = -12} + 2\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}_{=-4}$$

$$= -(-2)\cdot(-12) + 2\cdot(-4) = -32$$

$$\text{Térfogat}_{\triangle} = \frac{1}{6}|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}| = \frac{1}{6}\cdot|-32| = \frac{16}{3}$$

4. (3+3+4 pont) 3

A) Legyen $\vec{n_1} = (-3/5, 4/5)^T$, $\vec{n_2} = (-4/5, -3/5)^T$, $\vec{r} = (5, 15)^T$. Ha $\vec{r} = \alpha_1\vec{n_1} + \alpha_2\vec{n_2}$ akkor mennyi α_1 es α_2 ?

$$(\vec{n}_1, \vec{r}) = (\vec{n}_1, \alpha_1\vec{n}_1 + \alpha_2\vec{n}_2) + \alpha_1\underbrace{(\vec{n}_1, \vec{n}_1)}_{=1} + \alpha_2\underbrace{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}_{=0} = \alpha_1 \quad , \quad (\vec{n}_2, \vec{r}) = \alpha_2$$

$$\alpha_1 = (\vec{n}_1, \vec{r}) = \left(-\frac{3}{5}\right)\cdot 5 + \frac{4}{5}\cdot 15 = 9$$

$$\alpha_2 = (\vec{n}_2, \vec{r}) = \left(-\frac{4}{5}\right)\cdot 5 + \left(-\frac{3}{5}\right)\cdot 15 = -13$$

B) Legyen $\bar{a} = (1, -1, 3)$, $\bar{b} = (-2, 3, 4)$. Mennyi

- az $\bar{a}\bar{b}$ skalaris szorzat,

$$\vec{a}\vec{b} = 1\cdot(-2) + (-1)\cdot 3 + 3\cdot 4 = 7$$

- az $\bar{a}$ és a $\bar{b}$ vektorok altal bezart szog koszinusza,

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{7}{\sqrt{1^2+1^2+3^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2+4^2}} = \frac{7}{\sqrt{11\cdot 29}} = \frac{7}{\sqrt{319}}$$

- az $\bar{a}$ és a $\bar{b}$ oldalu haromszog terulete?

$$\text{Terület}_\Delta = \frac{1}{2}\text{Terület}_\square = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left((-1)\cdot 4 - 3\cdot 3\right) - \vec{j}\left(1\cdot 4 - 3\cdot(-2)\right) + \vec{k}\left(1\cdot 3 - (-1)\cdot(-2)\right) = -13\vec{i} - 10\vec{j} + \vec{k}$$

$$= (-13, -10, 1)$$

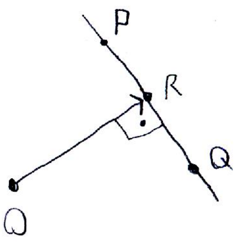
$$\text{Terület}_\Delta = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}| = \frac{1}{2}\sqrt{13^2+10^2+1} = \frac{1}{2}\sqrt{270}$$

C) Legyen $P = (3, 0, 0)$, $Q = (0, 1, 3)$. Ird fel a ket ponton atmeno egyenes parametrikus egyenletet! Keresd meg az egyenes azon R pontjat, amelyre $\vec{PQ} \perp \vec{OR}$!

$$\vec{v} = \vec{PQ} = (0,1,3) - (3,0,0) = (-3,1,3)$$

$$\vec{r}(t) = P + t\vec{v} = (3,0,0) + t\cdot(-3,1,3) = (3-3t, t, 3t)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{OR} \perp \vec{PQ} \iff (\vec{r}(t), \vec{v}) = 0$$



$$(\vec{r}(t), \vec{v}) = (3-3t)\cdot(-3) + t\cdot 1 + (3t)\cdot 3 =$$

$$= 19t - 9 = 0 \longrightarrow t = \frac{19}{9}$$

$$R = \vec{r}\left(\frac{19}{14}\right) = \left(3 - 3\cdot\frac{19}{4}, \frac{19}{4}, 3\cdot\frac{19}{4}\right) = \left(\frac{39}{19}, \frac{9}{19}, \frac{27}{19}\right)$$