

4. (3+3+4 pont)

A) Legyen $\bar{a} = (1, 2, 3)$, $\bar{b} = (2, 3, 4)$, $\bar{c} = (1, 1, t)$.

a) Mennyi t , ha az $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ vektorok lineárisan függetlenek?

b) Ha $t = 2$, akkor mekkora területe a tetraédernek, amelyet ezek a három vektor határoznak meg?

B) Legyen $\bar{a} = (1, 2, 3)$, $\bar{b} = (2, 3, 4)$. Mennyi

- az $\bar{a}\bar{b}$ skalárszorzat,
- az \bar{a} és a \bar{b} vektorok által bezárt szög koszinusza,
- az \bar{a} és a \bar{b} oldalú háromszög területe?

C) Legyen $P = (1, 0, 0)$, $Q = (0, 1, 3)$, $R = (0, 0, 2)$. Mennyi R távolsága a P -t és Q -t tartalmazó egyenesestől?

1. ((2+1+1)+(1+2)+2 pont)

A) Legyen $f : ((x, y)^T) \rightarrow (y, 2y - x, x - 4y, x)^T$ és $g : ((x, y)^T) \rightarrow (y, 2y - x)^T$.

a) Írd fel az f és g transzformációk F, G mátrixait!

b) Abban az esetben, ha létezik, mennyi az $f \circ g$ transzformáció mátrixa?

c) Abban az esetben, ha létezik, mennyi az $g \circ f$ transzformáció mátrixa?

B) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Abban az esetben, ha létezik, mennyi $(B + 2E)A + A$?

b) Abban az esetben, ha létezik, mennyi $(E + A)B + 2A$?

C) Legyen $x_0 = 13$, $x_{n+1} = 2x_n - 10$. Mennyi x_n ?

2. ((1+1+2)+(2+2)+2 pont) Írd fel a következő transzformációk mátrixait, ha az \mathbb{R}^2 és \mathbb{R}^3 vektortereket ortonormált bázisokban az $(x, y)^T$ és az $(x, y, z)^T$ vektorokkal koordinátázzuk!

A) \mathbb{R}^2 -ben:

a) az $x + y = 0$ egyenesre való merőleges vetítés,

b) az $x = 0$ egyenesre való merőleges tükrözés,

c) az origón átmenő, az $(4, 3)^T$ vektorral párhuzamos egyenesre való merőleges vetítés,

B) \mathbb{R}^3 -ben:

a) az $y + x = 0$ síkra való merőleges vetítés,

b) az $z - x = 0$ síkra való merőleges tükrözés,

C) Írd fel a síkbeli 135° -os elforgatás mátrixát!

3. (1+1+2+2+4 pont)

Adott öt pont

$$P = (-2, 0, 0), \quad Q = (0, 0, 2), \quad R = (0, 2, 0), \quad S = (1, 3, 3), \quad T = (2, 4, 4)$$

az \mathbb{R}^3 Euklideszi vektortérben egy ortonormált bázisban.

a) Írd fel a S és T pontokat tartalmazó egyenes parametrikus egyenletét!

b) Írd fel a S és T pontokat tartalmazó egyenes algebrai egyenletét!

c) Írd fel a P, Q és R pontokat tartalmazó sík algebrai egyenletét!

d) Hol van a sík és az egyenes metszéspontja?

e) Mennyi az egyenes távolsága az S -től?