Zh2.B, Lin.Alg., 2019.12.03. NEPTUN: Aláírás:

Név:

1. (3+4+3 pont) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Keresd meg A sajatertekeit!

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(6-\lambda) - 4 \cdot 0 = (5-\lambda)(6-\lambda)$$

$\Longrightarrow$ $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 6$, vagyis a diagonális elemek

(Ez automatikus trianguláris mátrixeknál)

Ellenőrzési: $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 6 \end{bmatrix} = 6 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

Keresd meg A sajatvektorait!

$$A\vec{v} = \lambda \vec{v} \iff (A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$$

$\lambda_1 = 5$

$$\begin{bmatrix} 5-5 & 4 \\ 0 & 6-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 4y = 0 \\ 1y = 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow y = 0$$

lehetséges sajátvektorok: $\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$ ahol $x \neq 0$

$$\vec{V_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 6$

$$\begin{bmatrix} 5-6 & 4 \\ 0 & 6-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} -1x + 4y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{matrix}\right\} \quad x = 4y$$

lehetséges sajátvektorok: $\begin{bmatrix} 4y \\ y \end{bmatrix}$ ahol $y \neq 0$

$$\vec{V_2} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mennyi $A^{11}(7,9)^T$?

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} = \alpha_1 \vec{V_1} + \alpha_2 \vec{V_2} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + 4\alpha_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{matrix} \alpha_2 = 9 \\ \alpha_1 = -29 \end{matrix}$$

$$A^{11}\begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} = A^{11}\left(9\vec{V_1} - 29\vec{V_2}\right) = 9 \cdot \lambda_1^{11} \cdot \vec{V_1} - 29 \cdot \lambda_2^{11} \cdot \vec{V_2} =$$

$$= 9 \cdot 5^{11} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 29 \cdot 6^{11} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vagy

$$A^{11}\begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} = \left[SDS^{-1}\right]^{11}\begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} = SD^{11}S^{-1}\begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}^{11}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5^{11} & 0 \\ 0 & 6^{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Itt $S = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{V_1} & \vec{V_2} \end{bmatrix}$.

2. (4+2+2–1+1 pont) Oldd meg pivotalassal a kovetkezo egyenletrenszert, tovabba jeloljuk az egyenletrendszer egyutthatomatrixat A-val! (A megoldast $\mathbb{R}^3$-beli vektorokkent add meg!)

$$1x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3$$
$$2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 6$$
$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1.$$

I.

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline e_1 & \boxed{1} & 3 & 2 & 3 \\ e_2 & 2 & 6 & 4 & 6 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

II.

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline a_1 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Nincs megoldás, mivel a II. tábla e_3 sorában az összes "a" alatti elem nulla, viszon a "b" alatti nem nulla.

ker A kiszámításához szükségesek a homogén egyenlet megoldásai.

$$\vec{a}_2 = 3\vec{a}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 = 3\vec{a}_1 + 0\vec{a}_3 \implies \vec{0} = 3\vec{a}_1 - 1\cdot\vec{a}_2 + 0\vec{a}_3$$
$$\vec{a}_3 = 2\vec{a}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 = 2\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 \implies \vec{0} = 2\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 - 1\vec{a}_3$$

A hom. egyenlet általános megoldása a következő két vektor lin. kombinációja:
$$\vec{X}_{hom_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{X}_{hom_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Add meg $Oszlop(A)$ dimenziojat es egy bazisat!

$\dim Oszlop(A) = \text{rang}\, A = 1$, mivel a II. tábla bal szélén csak egy "a" címke szerepel

bázis: $\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Add meg $\ker(A)$ dimenziojat es egy bazisat!

$\dim \ker(A) = 2$, mivel két független $\vec{X}_{hom_1}$, $\vec{X}_{hom_2}$ megoldása van a homogén egyenletnek.

bázis: $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Add meg $Sor(A)$ dimenziojat es egy bazisat!

$\dim Sor(A) = 1$, mivel a II. tábla bal szélen csak egy "a" címke szerepel.

bázis: $(1, 3, 2)^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad A: \mathbb{R}^3_\alpha \to \mathbb{R}^3_\beta$ $\quad \alpha$: forrás, β: célpont

$\text{rang}(A) = \dim Oszlop(A) = 1$

$\dim \ker A = \dim \mathbb{R}^3_\alpha - \text{rang}(A) = 3-1 = 2$

$\dim Sor A = \dim Oszlop(A) = \text{rang}(A) = 1$

$\dim \ker A^T = \dim \mathbb{R}^3_\beta - \text{rang}(A) = 3-1 = 2$

Add meg $\ker(A^T)$ dimenziojat!

$\dim \ker(A^T) = \dim \mathbb{R}^3 - \text{rang}\, A$
$= 3 - 1 = 2$

3. (5+5 pont) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Szamold ki pivotalassal det(A)-t!

	a_1	a_2	a_3
e_1	$\boxed{1}$	2	3
e_2	-4	-2	-5
e_3	2	3	5
a_1	1	2	3
e_2	0	6	7
e_3	0	$\boxed{-1}$	-1
a_1	1	0	1
e_2	0	0	$\boxed{1}$
a_2	0	1	1
a_1	1	0	0
a_3	0	0	1
a_2	0	1	0

az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ permutáció paritása:

1 2 3
1 2 3

egy db ×, páratlan

így $\det(A) = \boxed{1} \cdot \boxed{-1} \cdot \boxed{1} \cdot (-1) = 1$

pivotelemek

páros permutáció: 1
páratlan perm: -1

Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ird fel ezen matrix $A = LU$ felbontasat!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \\ 3 & 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 7.5 \end{bmatrix}$$

így $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \\ 3 & 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 7.5 \end{bmatrix}$

vagyis

$L =$ $\qquad$ $U =$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3/2 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 7.5 \end{bmatrix}$$

4. (6 + 4 pont) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Szamold ki pivotalassal A inverzet! Ellenorizd az eredmenyed!

	a_1	a_2	a_3	e_1	e_2	e_3
e_1	2	3	2	1	0	0
e_2	$\boxed{1}$	2	3	0	1	0
e_3	2	2	-1	0	0	1
e_1	0	$\boxed{-1}$	-4	1	-2	0
a_1	1	2	3	0	1	0
e_3	0	-2	-7	0	-2	1
a_2	0	1	4	-1	2	0
a_1	1	0	-5	2	-3	0
e_3	0	0	$\boxed{1}$	-2	2	1
a_2	0	1	0	7	-6	-4
a_1	1	0	0	-8	7	5
a_3	0	0	1	-2	2	1

Ellenőrzés:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 7 & 5 \\ 7 & -6 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tehát

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & 7 & 5 \\ 7 & -6 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Mennyi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad ?$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$