Zh2, Lin.Alg., 2019.12.03. NEPTUN: Aláírás:

Név:

1. (3+4+3 pont) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Keresd meg A sajatertekeit!

$$0 = \det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 0\cdot 4 = (2-\lambda)(3-\lambda)$$

$\Longrightarrow$ $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, vagyis a diagonális elemek

(Ez automatikus triangulális mátrixoknál)

Ellenőrzés: $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \end{bmatrix} = 2\cdot$

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\cdot$

Keresd meg A sajatvektorait!

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Longleftrightarrow (A-\lambda E)\vec{v} = \vec{0}$$

$\lambda_1 = 2$

$$\begin{bmatrix} 2-2 & 0 \\ 4 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$4x + 1y = 0 \Longrightarrow y = -4x$$

lehetséges sajátvektorok: $\begin{bmatrix} x \\ -4x \end{bmatrix}$ ahol $x \neq 0$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 3$

$$\begin{bmatrix} 2-3 & 0 \\ 4 & 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} -1x = 0 \\ 4x = 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow x = 0$$

lehetséges sajátvektorok: $\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$ ahol $y \neq 0$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mennyi $A^{15}(8,7)^T$?

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 = \alpha_1\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ -4\alpha_1+\alpha_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{matrix} \alpha_1 = 8 \\ \alpha_2 = 39 \end{matrix}$$

$$A^{15}\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix} = A^{15}\left(8\vec{v}_1 + 25\vec{v}_2\right) = 8\cdot\lambda_1^{15}\cdot\vec{v}_1 + 39\cdot\lambda_2^{15}\cdot\vec{v}_2 =$$

$$= 8\cdot 2^{15}\vec{v}_1 + 39\cdot 3^{15}\cdot v_2 = 8\cdot 2^{15}\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} + 39\cdot 3^{15}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vagy $A^{15}\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix} = \left[SDS^{-1}\right]^{15}\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix} = SD^{15}S^{-1}\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{15}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^{15} & 0 \\ 0 & 3^{15} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Itt $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$

3. (5+5 pont) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Szamold ki pivotalassal det(A)-t!

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline
e_1 & 2 & 3 & 5 \\
e_2 & \boxed{1} & 2 & 3 \\
e_3 & 4 & 2 & 5 \\ \hline
e_1 & 0 & \boxed{-1} & -1 \\
a_1 & 1 & 2 & 3 \\
e_3 & 0 & -6 & -7 \\ \hline
a_2 & 0 & 1 & 1 \\
a_1 & 1 & 0 & 1 \\
e_3 & 0 & 0 & \boxed{-1} \\ \hline
a_2 & 0 & 1 & 0 \\
a_1 & 1 & 0 & 0 \\
a_3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
\end{array}$$

az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ permutáció paritása:

$$\begin{matrix} 1 & & 2 & & 3 \\ & \times & & & | \\ 1 & & 2 & & 3 \end{matrix}$$

egy db $\times$, páratlan

Így $\det(A) = \boxed{1} \cdot \boxed{-1} \cdot \boxed{-1} \cdot (-1) = -1$

pivotelemek

páros permutáció: 1

páratlan perm.: −1

Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 7 \\ 4 & 10 & 11 \end{pmatrix}.$$

Ird fel ezen matrix $A = LU$ felbontasat!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 7 \\ 4 & 10 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\ell_2 \ell_1 A = U$$
$$A = \underbrace{\ell_1^{-1} \ell_2^{-1}} U$$
$$\ell_1^{-1} \ell_2^{-1} = L$$

Így

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 7 \\ 4 & 10 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

vagyis

$L =$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$U =$

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2. (6+4 pont) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Szamold ki pivotalassal A inverzet! Ellenorizd az eredmenyed!

	a_1	a_2	a_3	e_1	e_2	e_3
e_1	2	2	-1	1	0	0
e_2	2	3	2	0	1	0
e_3	$\boxed{1}$	2	3	0	0	1
e_1	0	-2	-7	1	0	-2
e_2	0	$\boxed{-1}$	-4	0	1	-2
a_1	1	2	3	0	0	1
e_1	0	0	$\boxed{1}$	1	-2	2
a_2	0	1	4	0	-1	2
a_1	1	0	-5	0	2	-3
a_3	0	0	1	1	-2	2
a_2	0	1	0	-4	7	-6
a_1	1	0	0	5	-8	7

Ellenőrzés:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -8 & 7 \\ -4 & 7 & -6 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tehát $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 7 \\ -4 & 7 & -6 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

Mennyi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad ?$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

4. (4+2+2+1+1 pont) Oldd meg pivotalassal a kovetkezo egyenletrenszert, tovabba jeloljuk az egyenletrendszer egyutthatomatrixat A-val! (A megoldast $\mathbb{R}^3$-beli vektorokkent add meg!)

$$1x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3$$
$$2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 6.$$

I.
$$\begin{array}{c|cccc|} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline e_1 & \boxed{1} & 3 & 2 & 3 \\ e_2 & 2 & 6 & 4 & 6 \\ \hline \end{array}$$

II.
$$\begin{array}{c|cccc|} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline a_1 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Partikuláris megoldás: $\vec{b} = 3\vec{a}_1 + 0\vec{e}_2 = 3\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 + 0\vec{a}_3$

$$\vec{X}_{part} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Homogén megoldások:

$\vec{a}_2 = 3\vec{a}_1 + 0\vec{e}_2 = 3\vec{a}_1 + 0\vec{a}_3 \Rightarrow \vec{0} = 3\vec{a}_1 - 1\cdot\vec{a}_2 + 0\vec{a}_3$

$\vec{a}_3 = 2\vec{a}_1 + 0\vec{e}_2 = 2\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 \Rightarrow \vec{0} = 2\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 - 1\vec{a}_3$

$$\vec{X}_{hom_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{X}_{hom_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Általános megoldás:

$$\vec{X}_{ált} = \vec{X}_{part} + t_1\vec{X}_{hom_1} + t_2\vec{X}_{hom_2} =$$
$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 3x_2 - 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Add meg $Oszlop(A)$ dimenziojat es egy bazisat!

$\dim Oszlop(A) = \text{rang}\,A = 1$, mivel a II. tábla bal szélén csak az egy "a_i" címke szerepel

bázis: $\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Add meg $\ker(A)$ dimenziojat es egy bazisat!

$\dim \ker(A) = 2$, mivel két független $\vec{X}_{hom_1}, \vec{X}_{hom_2}$ megoldása van a homogén egyenletnek.

bázis: $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Add meg $Sor(A)$ dimenziojat es egy bazisat!

$\dim Sor(A) = 1$, mivel a II. tábla bal szélén csak egy "a" címke szerepel.

bázis: $(1, 3, 2)^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

Add meg $\ker(A^T)$ dimenziojat!

$\dim \ker A^T = \dim \mathbb{R}^2 - \text{rang}\,A =$
$= 2 - 1 = 1$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$\text{rang}(A) = \dim Oszlop(A) = 1.$

$\dim \ker A = \dim \mathbb{R}^3 - \text{rang}(A) = 3 - 1 = 2$

$\dim Sor\,A = \dim Oszlop(A) = \text{rang}(A) = 1$

$\dim \ker A^T = \dim \mathbb{R}^2 - \text{rang}\,A = 2 - 1 = 1$