1. (1+1+2+2+4 pont)

A) Adott öt pont

$$P = (0,3,0), \quad Q = (3,3,0), \quad R = (0,0,3), \quad S = (6,3,0), \quad T = (9,5,1)$$

az $\mathbb{R}^3$ Euklideszi vektortérben egy ortonormált bázisban.

a) Írd fel a S és T pontokat tartalmazó egyenes parametrikus egyenletét!

$$\vec{v} = T - S = (3,2,1)$$

$$\vec{r}(t) = S + t\vec{v} = (6,3,0) + t\cdot(3,2,1) = (6+3t, 3+2t, 0+1t)$$

b) Írd fel a S és T pontokat tartalmazó egyenes algebrai egyenleteit!

$$\left.\begin{aligned} x &= 6+3t \\ y &= 3+2t \\ z &= 0+1t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} t &= \frac{x-6}{3} \\ &= \frac{y-3}{2} \\ &= \frac{z-0}{1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{x-6}{3} &= \frac{y-3}{2} \\ \frac{y-3}{2} &= \frac{z-0}{1} \end{aligned}$$

vagy $\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y - \frac{6}{3} + \frac{3}{2} = 0$

$\frac{1}{2}y - z - \frac{3}{2} = 0$

Ez két sík egyenlete, az egyenes a síkok metszete.

c) Írd fel a a P, Q és R pontokat tartalmazó sík algebrai egyenletét!

$$\bar{a} = Q - P = (3,0,0) \qquad \bar{n} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \bar{i}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} - \bar{j}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\bar{b} = R - P = (0,-3,3) \qquad = 0\bar{i} - 9\bar{j} - 9\bar{k} = (0,-9,-9)$$

$$\bar{n}\,[\bar{r} - P] = 0$$

$$(0,-9,-9)\cdot(x-0, y-3, z-0) = 0$$

$$0\cdot(x-0) - 9(y-3) - 9(z-0) = 0$$

$$0x - 9y - 9z + 27 = 0 \quad \text{vagy} \quad y + z = 3 = 0$$

d) Hol van a sík és az egyenes metszéspontja?

$$y + z - 3 = 0$$

$$(3+2t) + (0+1t) - 3 = 0$$

$$t = 0$$

$\vec{r}(t)$-nek az y, z koordinátái

metszéspont:

$$\vec{r}(0) = (6+3\cdot 0, 3+2\cdot 0, 0+1\cdot 0)$$

$$= (6,3,0) = S$$

Mivel a metszéspont maga S, így a sík és S távolsága eleve $\boxed{\text{nulla}}$.

vagy: $\vec{n}^0 = \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} = \frac{(0,-9,-9)}{\sqrt{0^2+(-9)^2+(-9)^2}} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

e) Mennyi az sík távolsága az S-től?

$$\text{távolság} = \left|\left((S-P), \vec{n}^0\right)\right| = \left|\left((6,0,0), \left(0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\right| = \left|6\cdot 0 + 0\cdot\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0\cdot\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| = 0$$

2. ((2+3)+2+3 pont)

A)

$$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},$$

tovabba legyen $\mathcal{K}(a,b)=aE+bI\in Mat_2(\mathbb{R}),\ a,b\in\mathbb{R}$.

- Mennyi $A=\mathcal{K}(2,3)\,\mathcal{K}(1,4)$?

$$A=\left[2\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right]\left[1\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2&3\\-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\-4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&11\\-11&-10\end{pmatrix}$$

vagy $A=(2E+3I)(1E+4I)=2E^2+8EI+3IE+12I^2=$

$$=2E+11I-12E=-10E+11I=\begin{pmatrix}-10&11\\-11&-10\end{pmatrix}$$

- Mennyi A^{-1} ?

$$\det A=\begin{vmatrix}-10&11\\-11&-10\end{vmatrix}=(-10)\cdot(-10)-11\cdot(-11)=10^2+11^2=221$$

$$\begin{pmatrix}-10&11\\-11&-10\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{aldet}]{\text{kieg.}}\begin{pmatrix}|-10|&|-11|\\|11|&|-10|\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{transzp.}}\begin{pmatrix}-10&11\\-11&-10\end{pmatrix}\xrightarrow{\pm1}\begin{pmatrix}-10&-11\\11&-10\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{221}\begin{pmatrix}-10&-11\\11&-10\end{pmatrix}=\mathcal{K}\left(-\frac{10}{221},-\frac{11}{221}\right)$$

B) Legyen

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&3/5&-4/5\\0&0&4/5&3/5\end{pmatrix}.$$

Mennyi A^{-1} ?

Mivel A ortogonális (hiszen $\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{5^2}{5^2}=1,\ \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=0$)

így $A^{-1}=A^T=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&3/5&4/5\\0&0&-4/5&3/5\end{pmatrix}$

C) Legyen

A 21-es elem kieg.aldet.-jét kell kiszámolni $(A^{-1})_{12}$-höz.

$$A=\begin{pmatrix}0&0&3&0\\\boxed{2}&0&1&2\\0&1&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

Mennyi $(A^{-1})_{12}$, ha az indexálás 1-től kezdődik?

$$\det A=0-0+3\cdot\begin{vmatrix}2&0&2\\0&1&1\\0&1&0\end{vmatrix}-0=3\left(2\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}}_{-1}-0\cdot\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}+2\overbrace{\begin{vmatrix}0&1\\0&1\end{vmatrix}}^{0}\right)=-6$$

$$(A^{-1})_{12}=\frac{1}{-6}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}0&3&0\\1&0&1\\1&0&0\end{vmatrix}}_{\text{Kieg. aldet.}\leftrightarrow A_{21}}=\frac{1}{-6}\cdot(-1)^{1+2}\cdot3=\frac{1}{2}$$

3. ((2+1+1)+(2+3)+2 pont)

A) Legyen $f:((x,y))\to(y+2x,\ x+4y,\ x)$ és $g:((x,y))\to(-x-y,\ 3y+5x)$.

a) Írd fel az f és g transzformációk F, G mátrixait!

$$f:\ (x,y)\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 0\end{pmatrix} = (2x+y,\ 1x+4y,\ 1x+0y) \qquad F=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

$$g:\ (x,y)\begin{pmatrix}-1 & 5\\ -1 & 3\end{pmatrix} = (-1x-1y,\ 5x+3y) \qquad G=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

b) Abban az esetben, ha létezik, mennyi az $f\circ g$ transzformáció mátrixa?

Az $f\circ g$ tr. mátrixa GF (nem FG, mivel a mátrixok jobbról szorozzák a vektorokat)

$$GF=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 19 & -1\\ 1 & 11 & -1\end{pmatrix}$$

c) Abban az esetben, ha létezik, mennyi az $g\circ f$ transzformáció mátrixa?

A tr. mátrixa FG lenne, de $\underbrace{\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 0\end{pmatrix}}_{3\text{dim}}\left.\begin{pmatrix}-1 & 5\\ -1 & 3\end{pmatrix}\right\}2\text{dim}$

nincs értelmezve, mert $2\neq 3$

B) Legyen

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

a) Abban az esetben, ha létezik, mennyi $(AB+(B+2E))$?

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}}_{B}+\ldots$$

NINCS ÉRTELMEZVE

b) Abban az esetben, ha létezik, mennyi $(E+B)A+2A$?

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 6 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5 & 3 & 4\\ 8 & 4 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 6 & 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 5 & 6\\ 14 & 6 & 10\end{pmatrix}$$

C) Mennyi az $\bar a=(1,1,2)$, $\bar b=(2,3,1)$ vektorok altal bezart szog koszinusza?

$$\cos\alpha=\frac{(\bar a,\bar b)}{|\vec a|\cdot|\vec b|}=\frac{1\cdot 2+1\cdot 3+2\cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2+1^2}}=\frac{7}{\sqrt6\cdot\sqrt{14}}=\frac{7}{\sqrt{84}}=\frac{7}{2\sqrt{21}}=\frac{\sqrt7}{2\sqrt3}$$

4. ((1+2+2)+(1+1+1)+2 pont)
Írd fel a következő transzformációk mátrixait, ha az $\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3$ vektortereket ortonormált bázisokban az $(x,y)^T$ es az $(x,y,z)^T$ vektorokkal koordinátázzuk!

A) $\mathbb{R}^2$-ben:

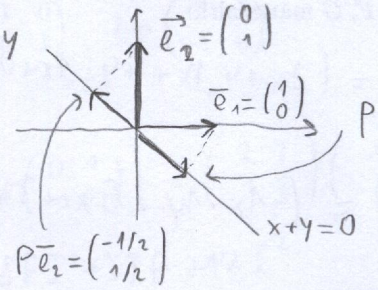
a) az $x+y=0$ egyenesre való merőleges vetítés,

Az egyenes irányába mutató egységvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

A projekció mátrixa:

$$P = \vec{n}\,\vec{n}^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

vagy



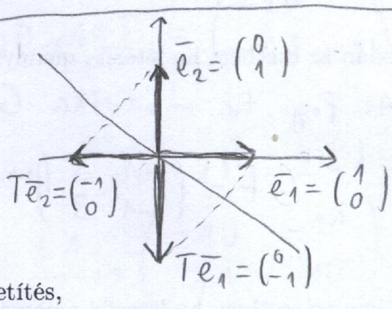
$P\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

$P\bar{e}_1$ $P\bar{e}_2$

$$P = \left(\boxed{\begin{matrix} 1/2 \\ -1/2 \end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix} -1/2 \\ 1/2 \end{matrix}} \right)$$

b) az $x+y=0$ egyenesre való merőleges tükrözés,

$$T = \left(\underbrace{\boxed{\begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix}}}_{T\bar{e}_1}\ \underbrace{\boxed{\begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix}}}_{T\bar{e}_2} \right)$$



c) az origón átmenő, az $(1,-1)^T$ vektorral párhuzamos egyenesre való merőleges vetítés,

Ez ugyanaz a feladat mint a), így a tr.-mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

B) $\mathbb{R}^3$-ben:

a) az $x=0$ síkra való merőleges vetítés (jeloljuk az eredmenyul kapott matrixot P_1-gyel),

$$P_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=P} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

vagy

$$P_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ P_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ P_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P_1 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$P_1\bar{e}_1$

b) az $y=0$ síkra való merőleges vetítés (jeloljuk az eredmenyul kapott matrixot P_2-vel),

$$P_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

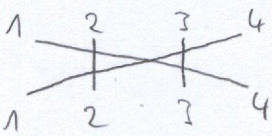
c) Mennyi P_1P_2 ?

$$P_1P_2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P_1\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ így } P_1P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C) Legyen $\det : V \times V \times V \times V \to \mathbb{R}$ egy olyan antiszimmetrikus multilinearis leképezés, hogy $\det(\bar{v}_1, \bar{v}_3, \bar{v}_2, \bar{v}_4) = 1$.
Mennyi $m = \det(3\bar{v}_4,\ 4\bar{v}_1 + 2\bar{v}_2,\ 5\bar{v}_3 + \bar{v}_3,\ -2\bar{v}_1)$?

$$m = 3\cdot 2\cdot 6\cdot(-2)\det(\bar{v}_4, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_1) = -72\cdot(-1) = 72$$

6=5+1



5 metszéspont ⟷ páratlan permutáció

Mivel a $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ permutáció páratlan