P Zh2, Lin.Alg., 2019.12.03. NEPTUN: Aláírás:

Név:

1. (3+4+3 pont) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Keresd meg A sajatertekeit!

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 3\cdot 0$$

$$\Longrightarrow \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1$$

Keresd meg A sajatvektorait!

$$A\vec{v} = \lambda \vec{v} \iff (A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$$

$\lambda_1 = 2$

$$\begin{bmatrix} 2-2 & 3 \\ 0 & 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 3y &= 0 \\ -y &= 0 \end{aligned}\right\} \to y = 0$$

sajátaltér: $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 1$

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 3 \\ 0 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$1x + 3y = 0 \to x = -3y$$

sajátaltér: $\left\{ \begin{bmatrix} -3y \\ y \end{bmatrix} \right\}$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mennyi $A^{15}(9,1)^T$?

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 - 3\alpha_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = 12$$

$$A^{15}\begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix} = A^{15}\left(12\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 12\cdot 2^{15}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1^{15}\cdot\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vagy $A^{15}\begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix} = [SDS^{-1}]^{15}\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix} = SD^{15}S^{-1}\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{15}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^{15} & 0 \\ 0 & 1^{15} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Itt $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \\ | & | \end{bmatrix}$

2. (6 · 4 pont) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Szamold ki pivotalassal A inverzet! Ellenorizd az eredmenyed!

	a_1	a_2	a_3	e_1	e_2	e_3
e_1	2	2	-1	1	0	0
e_2	2	3	2	0	1	0
e_3	$\boxed{1}$	2	3	0	0	1
e_1	0	-2	-7	1	0	-2
e_2	0	$\boxed{-1}$	-4	0	1	-2
a_1	1	2	3	0	0	1
e_1	0	0	$\boxed{1}$	1	-2	2
a_2	0	1	4	0	-1	2
a_1	1	0	-5	0	2	-3
a_3	0	0	1	1	-2	2
a_2	0	1	0	-4	7	-6
a_1	1	0	0	5	-8	7

Ellenőrzés:

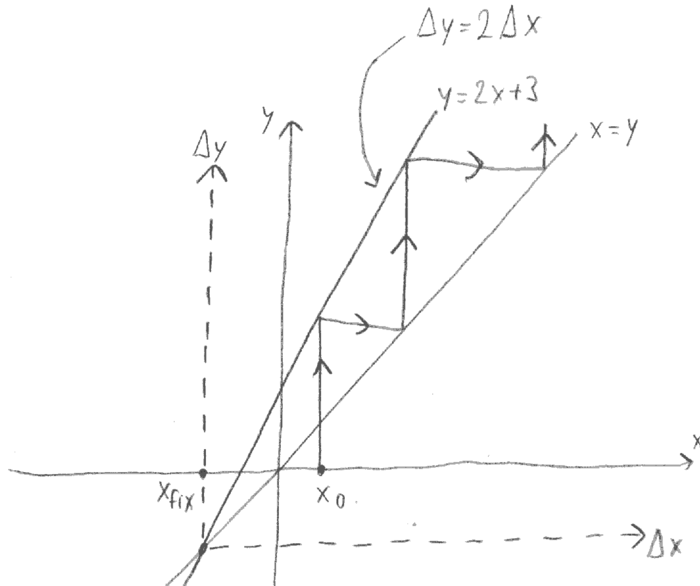
$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -8 & 7 \\ -4 & 7 & -6 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tehát $$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 7 \\ -4 & 7 & -6 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Legyen $x_0 = 2$, $x_{n+1} = 2x_n + 3$. Mennyi x_n ?

Fixpont: $$x_{fix} = 2x_{fix} + 3$$
$$x_{fix} = -3$$

$$x_n = 2^n\left(x_0 - x_{fix}\right) + x_{fix}$$
$$= 2^n\left(2 - (-3)\right) + (-3)$$
$$= 2^n \cdot 5 - 3$$



$\Delta x = x - x_{fix} = x - (-3)$

$\Delta x_0 = 2 - (-3) = 5$

$\Delta x_{n+1} = 2\Delta x_n$

$\Delta x_n = 2^n \cdot 5$

$x_n = \Delta x_n + x_{fix} = 2^n \cdot 5 - 3$

3. (5 · 5 pont) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Szamold ki pivotalassal det(A)-t!

	a_1	a_2	a_3
e_1	2	3	5
e_2	$\boxed{1}$	2	3
e_3	4	2	5
e_1	0	$\boxed{-1}$	-1
a_1	1	2	3
e_3	0	-6	-7
a_2	0	1	1
a_1	1	0	1
e_3	0	0	$\boxed{-1}$
a_2	0	1	0
a_1	1	0	0
a_3	0	0	1

a_2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ permutáció paritása:

1 2 3
1 2 3

egy db. X páratlan

így $\det A = \boxed{1} \cdot \boxed{-1} \cdot \boxed{-1} \cdot (-1) = -1$

páros perm.: 1
páratlan perm.: -1

Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 10 & 16 \\ 3 & 20 & 42 \end{pmatrix}.$$

Ird fel ezen matrix $A = LU$ felbontasat!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 10 & 16 \\ 3 & 20 & 42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 8 & 27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 8 & 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

így

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 10 & 16 \\ 3 & 20 & 42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

vagyis

$L =$ $U =$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

4. (4+2+2+1+1 pont) Oldd meg pivotalassal a kovetkezo egyenletrenszert, tovabba jeloljuk az egyenletrendszer egyutthatomatrixat A-val! (A megoldast $\mathbb{R}^3$-beli vektorokkent add meg!)

$$4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 2$$
$$2x_1 + 1x_2 + 3x_3 = 1$$
$$6x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 3.$$

I.

$$\begin{array}{c|cccc|} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline e_1 & 4 & 2 & 6 & 2 \\ e_2 & 2 & \boxed{1} & 3 & 1 \\ e_3 & 6 & 3 & 9 & 3 \\ \hline \end{array}$$

II.

$$\begin{array}{c|cccc|} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Partikuláris megoldás: $\vec{b} = 0\vec{e}_1 + 1\cdot\vec{a}_2 + 0\vec{e}_3 = 0\vec{a}_1 + 1\cdot\vec{a}_2 + 0\cdot\vec{a}_3$

$$\vec{X}_{part} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Homogén megoldások: $\vec{a}_1 = 0\vec{e}_1 + 2\vec{a}_2 + 0\vec{e}_3 = 2\vec{a}_2 + 0\vec{a}_3$

$\vec{0} = -1a_1 + 2a_2 + 0\vec{a}_3$

$\vec{a}_3 = 0\vec{e}_1 + 3\vec{a}_2 + 0\vec{e}_3 = 0\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2$

$\vec{0} = 0\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 - 1\vec{a}_3$

$$\vec{X}_{hom_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{X}_{hom_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Általános megoldás:

$$\vec{X}_{ált} = \vec{X}_{part} + t_1\vec{X}_{hom_1} + t_2\vec{X}_{hom_2} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 - 2x_1 - 3x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Add meg $Oszlop(A)$ dimenziojat es egy bazisat!

dim Oszlop(A) = rang A = 1, a II. tábla bal szélén levő egyetlen "$\vec{a}_2$" címke miatt

bázis: $\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Add meg ker(A) dimenziojat es egy bazisat!

dim ker(A) = 2, mivel két független $\vec{X}_{hom_1}$, $\vec{X}_{hom_2}$ megoldása van a homogén egyenletnek.

bázis: $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

Add meg $Sor(A)$ dimenziojat es egy bazisat!

dim Sor(A) = 1, mivel a II. tábla bal szélen csak egy "a_2" címke van.

bázis = $(2,1,3)^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Add meg ker(A^T) dimenziojat!

dim ker(A^T) = dim $\mathbb{R}^3$ − rang A = 3 − 1 = 2

$A: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$