PZh1, Lin.Alg., 2019.12.10. NEPTUN: Aláírás:

Név:

1. (1 1 2 2 4 pont)

A) Adott öt pont

$$P = (0,3,0),\quad Q = (3,3,0),\quad R = (3,0,0),\quad S = (6,3,0),\quad T = (9,5,1)$$

az $\mathbb{R}^3$ Euklideszi vektortérben egy ortonormált bázisban.

a) Írd fel a S és T pontokat tartalmazó egyenes parametrikus egyenletét!

$\vec{v} = T - S = (3,2,1)$

$\vec{r}(t) = S + t\vec{v} = (6,3,0) + t\cdot(3,2,1) = (6+3t,\ 3+2t,\ 0+1t)$

b) Írd fel a S és T pontokat tartalmazó egyenes algebrai egyenleteit!

$$\left.\begin{aligned} x &= 6+3t \\ y &= 3+2t \\ z &= 0+1t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} t &= \frac{x-6}{3} \\ &= \frac{y-3}{2} \\ &= \frac{z-0}{1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{x-6}{3} &= \frac{y-3}{2} \\ \frac{y-3}{2} &= \frac{z-0}{1} \end{aligned}$$

c) Írd fel a a P, Q és R pontokat tartalmazó sík algebrai egyenletét!

$\bar{a} = Q - P = (3,0,0)$

$\bar{b} = R - P = (3,-3,0)$

$$\bar{n} = \bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0\bar{i} - 0\bar{j} + \bar{k}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0\bar{i} - 0\bar{j} - 9\bar{k} = (0,0,-9)$$

$\bar{n}\cdot[\bar{r} - P] = 0$

$(0,0,-9)\cdot(x-0,\ y-3,\ z-0) = 0$

$0\cdot(x-0) + 0\cdot(y-3) - 9(z-0) = 0$

$-9z = 0$ vagy $z = 0$

d) Hol van a sík és az egyenes metszéspontja?

$z = 0$ sík egyenlete

$0 + 1t = 0$

$\vec{r}(t)$-nek a z koordinátája

$t = 0$

$\vec{r}(0) = (6+3\cdot0,\ 3+2\cdot0,\ 0+1\cdot0) = (6,3,0)$

Mivel S rajta van az $z=0$ síkon, így a távolság eleve nulla

vagy:

$$\vec{n}^{\circ} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(0,0,-9)}{\sqrt{0^2+0^2+(-9)^2}} = (0,0,-1)$$

e) Mennyi az sík távolsága az S-től?

$\text{távolság} = |(S-P, \vec{n}^{\circ})| = |((6,0,0),(0,0,-1))| = |6\cdot0 + 0\cdot0 + 0\cdot(-1)| = 0$

a sík akármelyik pontja

?

2. ((2+3)+2+3 pont)
A)

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

továbbá legyen $\mathcal{K}(a,b) = aE + bI \in Mat_2(\mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}$.

- Mennyi $A = \mathcal{K}(2,3)\mathcal{K}(1,4)$?

$$A = \left[2\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right]\cdot\left[1\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}2&3\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&11\\0&2\end{pmatrix}$$

Vagy: mivel $I^2 = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, így

$$A = (2E+3I)(1E+4I) = 2E^2 + 8EI + 3IE + 12I^2 = 2E + 11I =$$
$$= 2\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + 11\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&11\\0&2\end{pmatrix}$$

- Mennyi A^{-1} ?

$$\det A = \begin{vmatrix}2&11\\0&2\end{vmatrix} = 4$$

$$\begin{pmatrix}2&11\\0&2\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Kieg. aldet.}} \begin{pmatrix}|2| & |0|\\ |11| & |2|\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{transzp.}} \begin{pmatrix}2&11\\0&2\end{pmatrix} \xrightarrow{\pm 1} \begin{pmatrix}2&-11\\0&2\end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}2&-11\\0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2 & -11/4\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}$$

Vagy: $$(2E+11I)^{-1} = \left[2\cdot\left(E + \tfrac{11}{2}I\right)\right]^{-1} = \frac{1}{2}\left(E - \frac{11}{2}I + \underbrace{\left(\frac{11}{2}I\right)^2 - \left(\frac{11}{2}I\right)^3 + \dots}_{=0}\right)$$
$$= \frac{1}{2}E - \frac{11}{4}I$$

mivel $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$

B) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Mennyi A^{-1} ?

Mivel $\det A = 0$, így A^{-1} nem létezik

pl. mert az első sor csupa nulla

"A_{21}", NEM "A_{12}"

C) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ \boxed{0} & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \dots + 3\cdot\begin{vmatrix}0&2&2\\1&0&1\\1&0&0\end{vmatrix} + \dots$$
$$= 3\cdot\left[-2\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}}_{-1} + 2\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1&0\\1&0\end{vmatrix}}_{0}\right] = 6$$

Mennyi $(A^{-1})_{12}$, ha az indexálás 1-től kezdődik?

$$(A^{-1})_{12} = \frac{1}{6}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}0&3&0\\0&0&1\\0&0&0\end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot(-1)^3\cdot 0 = 0$$

mivel az utolsó sor csupa nulla.

3. ((2+1+1)+(2+3)+2 pont)

A) Legyen $f: ((x,y,z)) \to (y+2x, x+4y)$ és $g: ((x,y)) \to (-x-y, 3y+5x, x)$.

a) Írd fel az f és g transzformációk F, G mátrixait!

$$(y+2x, x+4y) = (x, y, z)\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{tehát} \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(-x-y, 3y+5x, x) = (x, y)\begin{bmatrix} -1 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{tehát} \quad G = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Abban az esetben, ha létezik, mennyi az $f \circ g$ transzformáció mátrixa?

$$GF = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 19 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$$

Megjegyzés: Mivel a mátrixok sorvektorokon jobbról hatnak, így a mátrixok sorrendje fordított az összetett leképezéshez képest.

c) Abban az esetben, ha létezik, mennyi az $g \circ f$ transzformáció mátrixa?

$$FG = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 13 & 2 \\ -5 & 17 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

B) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Abban az esetben, ha létezik, mennyi $(AB + (B + 2E))$?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 2E$$

nem létezik, mivel $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix}$ egy 3x2 dimenziós mátrix, ezt nem lehet összeadni B-vel, ami 2x2 dimenziós.

b) Abban az esetben, ha létezik, mennyi $(E + B)A + 2A$?

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

nem létezik, mert a $\begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ szorzás nem végezhető el.

C) Mennyi az $a = (1, 1, 2)$, $b = (1, 1, -1)$ vektorok altal bezart szog radianban merve?

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 0$$

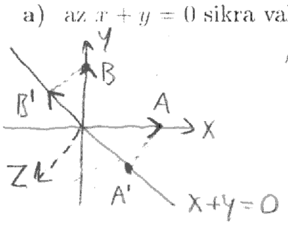
$$\cos \alpha = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = 0 \implies \alpha = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

4. ((1 + 2 + 2) + (1 + 1 + 1) + 2 pont)
Írd fel a következő transzformációk mátrixait, ha az $\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3$ vektortereket ortonormált bázisokban az $(x, y)^T$ és az $(x, y, z)^T$ vektorokkal koordinátázzuk!

ezek a lapra merőleges z-tengelyen vannak

A) $\mathbb{R}^3$-ben:

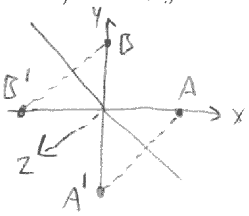
a) az $x + y = 0$ síkra való merőleges vetítés,



$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow A' = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow C' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow B' = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) az $x + y = 0$ síkra való merőleges tükrözés,



$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow A' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow C' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow B' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

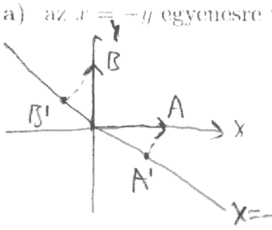
c) az origón átmenő, az $(1, 2, 3)^T$ vektorral párhuzamos egyenesre való merőleges vetítés.

$$\vec{n}^\circ = \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$P_n = \vec{n}^\circ \, \vec{n}^{\circ T} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{14}} \cdot (1, 2, 3) \right) = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (1\ 2\ 3) = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

B) $\mathbb{R}^2$-ben:

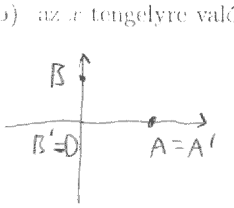
a) az $x = -y$ egyenesre való merőleges vetítés (jelöljük az eredményül kapott mátrixot P_1-gyel),



$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = A' \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = B'$$

b) az x tengelyre való merőleges vetítés (jelöljük az eredményül kapott mátrixot P_2-vel),



$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A' \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = B' = \text{Origó}$$

c) Mennyi $P_1 P_2$?

$$P_1 P_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

C) Legyen $\det : V \times V \times V \times V \to \mathbb{R}$ egy olyan antiszimmetrikus multilineáris leképezés, hogy $\det(\bar v_1, \bar v_3, \bar v_2, \bar v_4) = 1$. Mennyi $m = \det(3\bar v_4, 4\bar v_1 + 2\bar v_2, 5\bar v_3, -2\bar v_4)$?

$$m = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (-2) \det(\bar V_4, \bar V_1, \bar V_3, \bar V_4) + 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot (-2) \det(\bar V_4, \bar V_2, \bar V_3, V_4) = 0 + 0$$

mivel pl. $\det(\bar V_4, \bar V_2, \bar V_3, \bar V_4) = -\det(\vec V_4, \vec V_2, \bar V_3, \bar V_4)$, tehát $\det(\bar V_4, \bar V_2, \bar V_3, \bar V_4) = 0$