4. (4+2+2+1+1 pont) Oldd meg pivotalassal a kovetkezo egyenletrenszert, tovabba jeloljuk az egyenletrendszer egyutthatomatrixat A-val!

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 &= 6 \\ 1x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 9x_2 + 6x_3 &= 9. \end{aligned}$$

Add meg $Oszlop(A)$ dimenziojat es egy bazisat!
Add meg $Null(A)$ dimenziojat es egy bazisat!
Add meg $Sor(A)$ dimenziojat es egy bazisat!
Add meg $Null(A^T)$ dimenziojat!

Megoldas:

$$\left(\begin{array}{ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ e_1 & 2 & 6 & 4 & 6 \\ e_2 & 1_p & 3 & 2 & 3 \\ e_3 & 3 & 9 & 6 & 9 \end{array}\right), \qquad \left(\begin{array}{ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

A masodik pivottablabol a kovetkezo dolgokat lehet leolvasni:

- Az egyenletrenszer megoldhato, mivel az e_1 es e_3 sorok utolso, b eleme nulla.
- A b oszlopbol egy partikularis megoldas:
$$\bar{x}_{part} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
- Az a_2 es a_3 oszlopok alapjan ket homogen megoldas:
$$\bar{x}_{hom_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \bar{x}_{hom_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
- Igy az altalanos megoldas:
$$\bar{x}_{alt} = \bar{x}_{part} + t_2\bar{x}_{hom_2} + t_3\bar{x}_{hom_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - x_2\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - x_3\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$
(Tulajdonkeppen $x_1 = 3 - 3x_2 - 2x_3$ is elfogadhato megoldas, de ebbol nehezebb lenne kitalalni a helyes valaszt a tobbi kerdesre.)
- $Oszlop(A)$ dimenzioja annyi, ahany a_i cimke szerepel a pivottabla bal oldalan, esetunkben ez $\{a_1\}$, igy $\dim Oszlop(A) = 1$, egy bazis pedig $\{\bar{a}_1\}$. A matrix rangja $\dim Oszlop(A)$.
- $Null(A)$ dimenzioja annyi, ahany a_i cimke a tabla tetejen **nem** szerepel a tabla bal oldalan, esetunkben ez $\{a_2, a_3\}$, igy $\dim Null(A) = 2$, egy bazis pedig $\{\bar{x}_{hom_2}, \bar{x}_{hom_3}\}$.
- $Sor(A)$ dimenzioja annyi, ahany a_i cimke szerepel a pivottabla bal oldalan, esetunkben ez $\{a_1\}$, igy $\dim Sor(A) = 1$, egy bazis pedig az a_1 sor elso harom elemebol kepzett vektor transzponaltja, vagyis $\{(1,3,2)^T\}$
- $Null(A^T)$ dimenzioja $Oszlop(A)$ ortogonalis komplementerenek a dimenzioja, esetunkben
$$\dim \mathbb{R}^3 - \dim Oszlop(A) = 3 - 1 = 2,$$
ahol $\mathbb{R}^3$ az A matrixhoz tartozo $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearis lekepezes masodik $\mathbb{R}^3$-a. (Ennyi sora van a pivottablanak.)

Megjegyzes: A kerdeses dimenziok mind kifejezhetoek az A matrixhoz tartozo $A : \mathbb{R}^3_{forras} \to \mathbb{R}^3_{celpont}$ linearis lekepezes $\dim \mathbb{R}^3_{forras} = 3_f$ es $\dim \mathbb{R}^3_{celpont} = 3_c$ dimenzioival, tovabba a matrix $rang(A)$ rangjaval, ami ugyanaz mint $\dim Oszlop(A)$.

- $\dim Oszlop(A) = rang(A) = 1_r$,
- $\dim Null(A) = 3_f - rang(A) = 2$,
- $\dim Sor(A) = \dim Oszlop(A) = rang(A) = 1_r$,
- $\dim Null(A^T) = 3_c - rang(A) = 2.$

1. (3+4+3 pont) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Keresd meg A sajatertekeit!

Keresd meg A sajatvektorait!

Mennyi $A^{13}(9,8,7)^T$?

Megoldas: A blokk-diagonalis, a kovetkezo blokkokkal:

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = (5),$$

ahol a masodik A_3 blokk sajatrendszere:

$$\lambda_3 = 5, \qquad \bar{v}_3 = (1).$$

A_{12} sajatertekei: Mivel A_{12} (also) triangularis, igy a sajatertekek a diagonalis elemek, vagy ugyanez nehezebben:

$$\det(A_{12} - \lambda E) = 0 = (2-\lambda)(3-\lambda) - 0 \cdot 4 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3.$$

A_{12} sajatertekei:

$$(A_{12} - \lambda E)\bar{v} = \bar{0},$$

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 0 \\ 4 & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad 0v_1 + 0v_2 = 0,\ \ 4v_1 + 1v_2 = 0, \qquad \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 0 \\ 4 & 3-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad -1v_1 + 0v_2 = 0,\ \ 4v_1 + 0v_2 = 0 \qquad \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Igy az eredeti A matrix sajtrendszere:

$$\lambda_1 = 2,\ \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = 3,\ \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_3 = 5,\ \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ekkor a $\bar{v}_i$ vektorokbol keszitett

$$S = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrix diagonalizalja A-t:

$$S^{-1}AS = D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

$$A = SDS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Mivel $A^{13} = (SDS^{-1})^{13} = SD^{13}S^{-1}$, igy

$$A^{13}\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{13} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{13} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Megjegyzes: Ha valaki nem veszi eszre a blokk strukturat, akkor mindez direkt modon is kiszamolhato:

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 4 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 5-\lambda \end{vmatrix},$$

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 5.$$

Ekkor a sajatvektorok egyenletei:

$$\bar{0} = (A - 2E)\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 4 & 3-2 & 0 \\ 0 & 0 & 5-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{0} = (A - 2E)\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 2-3 & 0 & 0 \\ 4 & 3-3 & 0 \\ 0 & 0 & 5-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{0} = (A - 2E)\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 2-5 & 0 & 0 \\ 4 & 3-5 & 0 \\ 0 & 0 & 5-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$A^{13}(9,8,7)^T$ ugy is kiszamolhato, hogy az $\bar{x}=(9,8,7)^T$ vektort felbontjuk a sajatvektorok linearis kombinaciojakent:

$$\begin{pmatrix}9\\8\\7\end{pmatrix}=9\begin{pmatrix}1\\-4\\0\end{pmatrix}+44\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$A^{13}\begin{pmatrix}9\\8\\7\end{pmatrix}=9\cdot 2^{13}\begin{pmatrix}1\\-4\\0\end{pmatrix}+44\cdot 3^{13}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+7\cdot 5^{13}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

---

2. (7+3 pont) Legyen

$$A=\begin{pmatrix}4&2&5\\1&2&3\\2&3&5\end{pmatrix}.$$

Szamold ki pivotalassal A inverzet! Ellenorizd az eredmenyed!
Megoldas:

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix}a_1&a_2&a_3&e_1&e_2&e_3\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_1\\e_2\\e_3\end{matrix} & \begin{pmatrix}4&2&5&1&0&0\\1_p&2&3&0&1&0\\2&3&5&0&0&1\end{pmatrix}\end{array},\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}a_1&a_2&a_3&e_1&e_2&e_3\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_1\\a_1\\e_3\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&-6&-7&1&-4&0\\1&2&3&0&1&0\\0&-1_p&-1&0&-2&1\end{pmatrix}\end{array},$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix}a_1&a_2&a_3&e_1&e_2&e_3\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_1\\a_1\\a_2\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&0&-1_p&1&8&-6\\1&0&1&0&-3&2\\0&1&1&0&2&-1\end{pmatrix}\end{array},\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}a_1&a_2&a_3&e_1&e_2&e_3\end{matrix}\\ \begin{matrix}a_3\\a_1\\a_2\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&0&1&-1&-8&6\\1&0&0&1&5&-4\\0&1&0&1&10&-7\end{pmatrix}\end{array}$$

Ebbol

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&5&-4\\1&10&-7\\-1&-8&6\end{pmatrix},$$

ahol a pivottabla jobbfelen az a_3 sort legalulra tettuk.

Mennyi

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\4&1&0&0\\5&0&1&0\\6&0&0&1\end{pmatrix}$$

inverze?
Megoldas:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-4&1&0&0\\-5&0&1&0\\-6&0&0&1\end{pmatrix}.$$

---

3. (5+5 pont) Legyen

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&2&5\\2&3&5\end{pmatrix}.$$

Szamold ki pivotalassal $\det(A)$-t!
Megoldas:

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix}a_1&a_2&a_3\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_1\\e_2\\e_3\end{matrix} & \begin{pmatrix}1_p&2&3\\4&2&5\\2&3&5\end{pmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix}a_1&a_2&a_3\end{matrix}\\ \begin{matrix}a_1\\e_2\\e_3\end{matrix} & \begin{pmatrix}1&2&3\\0&-6&-7\\0&-1_p&-1\end{pmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix}a_1&a_2&a_3\end{matrix}\\ \begin{matrix}a_1\\e_2\\a_2\end{matrix} & \begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&-1_p\\0&1&1\end{pmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix}a_1&a_2&a_3\end{matrix}\\ \begin{matrix}a_1\\a_3\\a_2\end{matrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\end{array},\quad \det(A)=-1$$

Itt $\det(A)$-t a kovetkezokeppen kapjuk meg: Osszeszorozzuk a pivotelemeket, illetve az utolso pivotttabla permutaciomatrixahoz tartozo $(-1)^{paritas}$ faktort. Esetunkben az $(1,2,3)\to(1,3,2)$ permutacio paratlan (vagyis paratlan szamu elemparcsere allitana elo), igy

$$\det(A)=1_p\cdot(-1_p)\cdot(-1_p)\cdot(-1)^{paratlan\ egesz\ szam}=-1.$$

Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ird fel ezen matrix $A = LU$ felbontasat!
Megoldas:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Ekkor

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} I.\,sor \\ II.sor - (0/2)\cdot I.\,sor \\ III.sor - (4/2)\cdot I.\,sor \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(0/2) & 1 & 0 \\ -(4/2) & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ebbol mar tudjuk, hogy

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (0/2) & 1 & 0 \\ (4/2) & * & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Tovabba

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} I.\,sor \\ II.sor \\ III.sor - (-1/1)\cdot II.\,sor \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

igy

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (0/2) & 1 & 0 \\ (4/2) & (-1/1) & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Valoban:

$$A = LU = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Megjegyzes: Miert mukodik ez az eljaras?

$$\ell_2 \ell_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -(-1/1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(0/2) & 1 & 0 \\ -(4/2) & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = U$$

Igy

$$A = \ell_1^{-1}\ell_2^{-1}U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (0/2) & 1 & 0 \\ (4/2) & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & (-1/1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (0/2) & 1 & 0 \\ (4/2) & (-1/1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Itt az $\ell_1^{-1}\ell_2^{-1}$ szorzat extra szamolas nelkul megkaphato:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -b & -c & 1 \end{pmatrix}.$$