4. (3+3+4 pont) ZH1 2018 Lin.Alg.

A) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}.$$

Adj meg egy olyan skaláris egyenletrendszert, aminek az egyértelmű megoldása x, y, u, v !
Megold.:

$$AA^{-1} = E,$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
vagyis
$$\begin{array}{rr} 0x + (-1)y = 1 & 0u + (-1)v = 0 \\ 2x + 3y = 0 & 2u + 3v = 1 \end{array}$$

vagy

$$A^{-1}A = E,$$
$$\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
vagyis
$$\begin{array}{rr} 0x + 2u = 1 & -x + 3u = 0 \\ 0y + 2v = 0 & -y + 3v = 1 \end{array}$$

B) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} -1/5 & 0 & -\sqrt{24/25} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sqrt{24/25} & 0 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Mennyi A^{-1} ?
Megold.: Mivel A ortogonális, így

$$A^{-1} = A^T = \begin{pmatrix} -1/5 & 0 & -\sqrt{24/25} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sqrt{24/25} & 0 & 1/5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1/5 & 0 & -\sqrt{24/25} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sqrt{24/25} & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

(Mivel A szimmetrikus, vagyis $A = A^T$, igy $A^{-1} = A$.)

C) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 8 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mennyi $(A^{-1})_{23}$, ha az indexálás 1-től kezdődik?
Megold.:

$$\det(A) = 0 + (-1)^{4+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 87,$$
$$(A^{-1})_{23} = \frac{1}{\det(A)}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Megjegyzés:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{29} & -\frac{2}{29} & \frac{4}{29} & -\frac{14}{29} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{16}{87} & \frac{1}{29} & -\frac{2}{29} & -\frac{37}{87} \\ -\frac{8}{87} & \frac{14}{29} & \frac{1}{29} & -\frac{199}{87} \end{pmatrix}$$

1. ((2+1+1)+(1+2)+2 pont)

A) Legyen $f : ((x,y)) \to (y-x,\ 2x-3y,\ x)$ és $g : ((x,y)) \to (y,\ y-2x)$.

a) Ird fel az f és g transzformációk F, G mátrixait!

Megold:

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Abban az esetben, ha létezik, mennyi az $f \circ g$ transzformáció mátrixa?

Megold.:

$$GF = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Abban az esetben, ha létezik, mennyi az $g \circ f$ transzformáció mátrixa?

Megold.: Nem létezik.

B) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Abban az esetben, ha létezik, mennyi $(AB + (B + 2E))$?

Megold.: Nem létezik.

b) Abban az esetben, ha létezik, mennyi $(E + B)A + 2A$?

Megold.:

$$(E+B)A + 2A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -2 & 10 & 6 \\ -2 & 6 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 18 & 8 \\ -2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

C) Ha egy ortonormált bázisban $\bar{a} = (-1, x, 2)$, $\bar{b} = (2, x, -1)$ merőleges egymásra, akkor mennyi lehet x ?

Megold.:

$$\bar{a}\bar{b} = -2 + x^2 - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 2$$

2. ((1+1+2)+(2+2)+2 pont) Írd fel a következő transzformációk mátrixait, ha az $\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3$ vektortereket ortonormált bázisokban az $(x,y)^T$ es az $(x,y,z)^T$ vektorokkal koordinátázzuk!

A) $\mathbb{R}^2$-ben:

a) az $x+y=0$ egyenesre való merőleges vetítés,

Megold.:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b) az $x+y=0$ egyenesre való merőleges tükrözés,

Megold.:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) az origón átmenő, az $(2,3)^T$ vektorral párhuzamos egyenesre való merőleges vetítés,

Megold.:

$$\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{2^2+3^2}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad P_n = \bar{n}^T\bar{n} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{9}{13} \end{pmatrix}$$

B) $\mathbb{R}^3$-ben:

a) az $z+y=0$ síkra való merőleges vetítés,

Megold.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b) az $x+y=0$ síkra való merőleges tükrözés,

Megold.:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B) Legyen $\phi : V \times V \times V \times V \to \mathbb{R}$ egy olyan antiszimmetrikus multilinearis leképezés, hogy $\phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4) = 3$. Mennyi $m = \phi(2\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2,\, \bar{v}_1,\, 4\bar{v}_3 + 2\bar{v}_4,\, -\bar{v}_3)$?

Megold.:

$$m = \phi(3\bar{v}_2,\, \bar{v}_1,\, 2\bar{v}_4,\, -\bar{v}_3) = (3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-1)) \cdot \phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4) \cdot 1 = -18,$$

mivel a $(1,2,3,4) \to (2,1,4,3)$ permutáció páros.

3. (1+1+2+2+4 pont)
A) Adott öt pont

$$P = (-3, 0, 0), \quad Q = (0, 0, -3), \quad R = (0, -3, 0), \quad S = (1, 3, -1), \quad T = (2, 5, 2)$$

az $\mathbb{R}^3$ Euklideszi vektortérben egy ortonormált bázisban.
a) Írd fel a S és T pontokat tartalmazó egyenes parametrikus egyenletét!
Megold.:

$$\bar{r}(t) = S + t(T - S) = (1, 3, -1) + t \cdot (1, 2, 3) = (1 + t, 3 + 2t, -1 + 3t),$$

b) Írd fel a S és T pontokat tartalmazó egyenes algebrai egyenleteit!
Megold.:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}$$

c) Írd fel a a P, Q és R pontokat tartalmazó sík algebrai egyenletét!
Megold.:

$$\bar{n} = (Q - P) \times (R - P) = (-9, -9, -9),$$
$$\bar{n}(\bar{r} - P) = 0,$$
$$-9x - 9y - 9z - 27 = 0.$$

d) Hol van a sík és az egyenes metszéspontja?
Megold.:

$$-9(1 + t) - 9(3 + 2t) - 9(-1 + 3t) - 27 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = -1, \qquad \bar{r}(-1) = (0, 1, -4).$$

e) Mennyi az sík távolsága az S-től?
Megold.:

$$\text{távolság} = \frac{|\bar{n}(S - P)|}{|\bar{n}|} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$