4. (3+3+4 pont)
A) Legyen
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}.$$
Adj meg egy olyan skaláris egyenletrendszert, aminek az egyértelmű megoldása x, y, u, v !
Megoldas:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$5x + 6y = 1, \;\; 7x + 8y = 0, \quad 5u + 6v = 0, \;\; 7u + 8v = 1.$$

Vagy
$$\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$5x + 7u = 1, \;\; 5y + 7v = 0, \quad 6x + 8u = 0, \;\; 6y + 8v = 1.$$

B) Legyen
$$A = \begin{pmatrix} 1\sqrt{2} & 1\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -1\sqrt{2} & 1\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$
Mennyi A^{-1} ?
Megoldas:
Mivel A ortogonalis matrix (vagyis az oszlopai (es a sorai) egy ortonormalt bazis alkotnak), igy
$$A^{-1} = A^T = \begin{pmatrix} 1\sqrt{2} & -1\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1\sqrt{2} & 1\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

C) Legyen
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Mennyi $(A^{-1})_{23}$, ha az indexálás 1-től kezdődik?
Megoldas:

$$\det A = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-10) = 10,$$
$$(A^{-1})_{23} = \frac{(-1)^{2+3}}{10} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4/10.$$

1. ((2+1+1)+(2+3)+2 pont)
A) Legyen $f : ((x, y)) \to (2y - x,\, 2x + 4y,\, x)$ és $g : ((x, y)) \to (x - y,\, 3y - 5x)$.
a) Ird fel az f és g transzformációk F, G mátrixait!
Megoldas:
$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$
b) Abban az esetben, ha létezik, mennyi az $f \circ g$ transzformáció mátrixa?
Megoldas:
$$GF = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -18 & 1 \\ 7 & 10 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Abban az esetben, ha létezik, mennyi az $g \circ f$ transzformáció mátrixa?
Megoldas:
Nem letezik.

B) Legyen
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Abban az esetben, ha létezik, mennyi $(AB + (B + 2E))$?
Megoldas:
$$\begin{pmatrix} 14 & 18 & 8 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Abban az esetben, ha létezik, mennyi $(E + B)A + 2A$?
Megoldas:
Nem letezik.

C) Ha egy ortonormált bázisban $\bar{a} = (-x, x, 2)$, $\bar{b} = (2, 3, x)$ merőleges egymásra, akkor mennyi lehet x ?
Megoldas:
$$0 = \bar{a}\bar{b} = -2x + 3x + 2x \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$$

2. ((1+1+2)+(2+2)+2 pont)
Írd fel a következő transzformációk mátrixait, ha az $\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3$ vektortereket ortonormált bázisokban az $(x, y)^T$ es az $(x, y, z)^T$ vektorokkal koordinátázzuk!
A) $\mathbb{R}^2$-ben:
a) az $x - y = 0$ egyenesre való merőleges vetítés,
Megoldas:
$$\begin{pmatrix} 1/2 & /1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

b) az $x - y = 0$ egyenesre való merőleges tükrözés,
Megoldas:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) az origón átmenő, az $\bar{a} = (4, 3)^T$ vektorral párhuzamos egyenesre való merőleges vetítés,
Megoldas:
$$\bar{n} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}, \qquad \bar{n}\bar{n}^T = \frac{1}{4^2 + 3^2} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}.$$

B) $\mathbb{R}^3$-ben:
a) az $x - y = 0$ síkra való merőleges vetítés,
Megoldas:
$$\begin{pmatrix} 1/2 & /1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) az $x - y = 0$ síkra való merőleges tükrözés,
Megoldas:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C) Legyen $\phi : V \times V \times V \times V \to \mathbb{R}$ egy olyan antiszimmetrikus multilinearis leképezés, hogy $\phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4) = 2$.
Mennyi $m = \phi(3\bar{v}_1 + 2\bar{v}_2,\ 4\bar{v}_1,\ 5\bar{v}_3 + \bar{v}_4,\ -2\bar{v}_3)$?
Megoldas:
$$m = \phi(2\bar{v}_2,\ 4\bar{v}_1,\ \bar{v}_4,\ -2\bar{v}_3) = -16\phi(\bar{v}_2,\ \bar{v}_1,\ \bar{v}_4,\ \bar{v}_3)$$
$$-16 \cdot 1 \cdot \phi(\bar{v}_1,\ \bar{v}_2,\ \bar{v}_3,\ \bar{v}_4) = -32,$$

mivel a $(1, 2, 3, 4) \to (2, 1, 4, 3)$ permutacio paros.
3. (1+1+2+2+4 pont)

A) Adott öt pont
$$P = (3,0,0), \quad Q = (0,0,3), \quad R = (0,3,0), \quad S = (1,4,1), \quad T = (2,5,2)$$
az $\mathbb{R}^3$ Euklideszi vektortérben egy ortonormált bázisban.

a) Írd fel a S és T pontokat tartalmazó egyenes parametrikus egyenletét!

Megoldas:

$$\bar{v} = T - S = (1,1,1), \qquad \bar{r}(t) = S + t\bar{v} = (1+t, +4+t, 1+t).$$

b) Írd fel a S és T pontokat tartalmazó egyenes algebrai egyenletéit!

Megoldas: Pl.:

$$x - 1 = y - 4, \qquad y - 4 = z - 1.$$

c) Írd fel a a P, Q és R pontokat tartalmazó sík algebrai egyenletét!

Megoldas:

$$\begin{gathered} Q - P = (-3,0,3), \quad R - P = (-3,3,0), \qquad \bar{n} = (Q-P) \times (R-P) = (-9,-9,-9), \\ \bar{n}(\bar{r} - P) = 0, \\ -9(x-3) - 9(y-0) - 9(z-0) + 27 = 0, \\ x + y + z = 3. \end{gathered}$$

d) Hol van a sík és az egyenes metszéspontja?

Megoldas:

$$\begin{gathered} (1+t) + (4+t) + (1+t) - 3 = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad t = -1, \\ \bar{r}(-1) = (0,3,0). \end{gathered}$$

e) Mennyi az sík d távolsága az S-től?

Megoldas:

$$\begin{gathered} \text{a sik normalvektora:} \quad \bar{n} = (-9,-9,-9), \\ \text{a sik egysegnyi hosszu normalvektora:} \quad \bar{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,-1), \\ d = |\bar{n}_0(S-P)| = \left| \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,-1) \cdot (-2,4,1) \right| = \sqrt{3}. \end{gathered}$$