Lin.Alg.Zh.1 feladatok

0.1. 3d vektorok

Adott három vektor

$$\bar{a} = (0, 2, 4), \quad \bar{b} = (1, 1, 4), \quad \bar{c} = (0, 2, -4)$$

az $\mathbb{R}^3$ Euklideszi vektortérben egy ortonormált bázisban.

1. Mennyi az $\bar{a}\bar{b}$ skalárszorzat?
$$\bar{a}\bar{b} = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 = 18$$

2. Mennyi az $\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b}$ vektoriális szorzat?
$$\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = i \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - j \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (4, 4, -2)$$

3. Mennyi az $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ vegyesszorzat?
$$v = (\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = (4, 4, -2)(0, 2, -4) = 16$$
vagy
$$v = (\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 16$$

4. Merőleges-e egymásra $\bar{a}$ és $\bar{b}$? Miért?
Nem, mert az $s = 18$ skalárszorzat nem nulla.

5. Egy síkba esik-e $\bar{a}$, $\bar{b}$ és $\bar{c}$? Miért?
Nem, mert az $v = 16$ vegyesszorzat nem nulla.

6. Mennyi az $\bar{a}$, $\bar{b}$ vektorok által bezárt szög koszinusza?
$$\cos\alpha = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = 3/\sqrt{10}$$

7. Mennyi az $\bar{a}$ ess $\bar{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe?
$$T_{par} = |\bar{a} \times \bar{b}| = |(4, 4, -2)| = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-2)^2} = 6$$

8. Mennyi az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektorok által kifeszített háromszög területe?
$$T_{harom} = \frac{T_{par}}{2} = 3$$

9. Mennyi az $\bar{a}$, $\bar{b}$ és $\bar{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata?
$$V_{pip} = |\bar{a}\bar{b}\bar{c}| = |v| = 16$$

10. Mennyi az $\bar{a}$, $\bar{b}$ és $\bar{c}$ vektorok által kifeszített tetraéder térfogata?
$$V_{tetra} = \frac{V_{pip}}{6}$$

11. Milyen sodrású az $\bar{a}$, $\bar{b}$ és $\bar{c}$ vektorok által alkotott rendszer? Miért?
Jobb, mivel
$$v = \bar{a}\bar{b}\bar{c} > 0$$
(Ha $v < 0$ balsodrású, míg $v = 0$ eseten a három vektor egy síkba esik.)

12. Bázist alkot-e $\bar{a}$, $\bar{b}$ és $\bar{c}$? Miért?
Igen, mert
$$v = \bar{a}\bar{b}\bar{c} \neq 0$$

13. Mennyi $\bar{c}$-nek a $\bar{c}_p$ merőleges vetülete $\bar{c}$-re?
$\bar{c}$

14. Mennyi $\bar{c}$-nek a $\bar{c}_p$ merőleges vetülete $\bar{a}$-re?
$$\bar{c}_p = \frac{\bar{a}\bar{c}}{|\bar{a}|^2} \cdot a = \frac{-12}{20} \cdot (0, 2, 4) = (0, -6/5, -12/5)$$

15. Mennyi $\bar{c}$-nek a $\bar{c}_t$ merőleges tükrözöttje $\bar{c}$-re?
$\bar{c}$

16. Mennyi $\bar{c}$-nek a $\bar{c}_t$ merőleges tükrözöttje $\bar{a}$-re?
$$\bar{c}_t = 2\bar{c}_p - \bar{c} = (0, -22/5, -4/5)$$

17. Mennyi $\bar{c}$-nek a $\bar{c}_p$ merőleges vetülete a $\bar{c}$ és a $\bar{a}$ vektorok által generált síkra?
$\bar{c}$

18. Mennyi $\bar{c}$-nek a $\bar{c}_p$ merőleges vetülete a $\bar{a}$ és a $\bar{b}$ vektorok által generált síkra?
$$\begin{aligned} \bar{n} &= \bar{a} \times \bar{b} = (0, 2, -4), \\ \bar{c}_m &= \frac{\bar{n}\bar{c}}{|\bar{n}|^2} \cdot n = (16/9, 16/9, -8/9), \\ \bar{c}_p &= \bar{c} - \bar{c}_m = (-16/9, 2/9, -28/9) \end{aligned}$$

19. Mennyi $\bar{c}$-nek a $\bar{c}_t$ merőleges tükrözöttje a $\bar{c}$ és a $\bar{a}$ vektorok által generált síkra?
$\bar{c}$

20. Mennyi $\bar{c}$-nek a $\bar{c}_t$ merőleges tükrözöttje a $\bar{a}$ és a $\bar{b}$ vektorok által generált síkra?
$$\bar{c}_t = \bar{c} - 2\bar{c}_m = (-32/9, -14/9, -20/9)$$

Gyakorlás

Ismételd meg a feladatot!

I.

$$\bar{a} = (3, 1, 1), \quad \bar{b} = (0, 4, 1), \quad \bar{c} = (1, 1, -5)$$

Megoldás:

5	$\{-3, -3, 12\}$	-66	nem	nem
$\frac{5}{\sqrt{187}}$	$9\sqrt{2}$	$\frac{9}{\sqrt{2}}$	66	11
bal	igen	$\{1, 1, -5\}$	$\{-\frac{3}{11}, -\frac{1}{11}, -\frac{1}{11}\}$	$\{1, 1, -5\}$
$\{-\frac{17}{11}, -\frac{13}{11}, \frac{53}{11}\}$	$\{1, 1, -5\}$	$\{-\frac{2}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{1}{9}\}$	$\{1, 1, -5\}$	$\{-\frac{13}{9}, -\frac{13}{9}, \frac{43}{9}\}$

II.

$$\bar{a} = (3, 1, 1), \quad \bar{b} = (0, 4, 1), \quad \bar{c} = (3, 9, 3)$$

Megoldás:

5	$\{-3, -3, 12\}$	0	nem	igen
$\frac{5}{\sqrt{187}}$	$9\sqrt{2}$	$\frac{9}{\sqrt{2}}$	0	0
nem bazis	nem	$\{3, 9, 3\}$	$\{\frac{63}{11}, \frac{21}{11}, \frac{21}{11}\}$	$\{3, 9, 3\}$
$\{\frac{93}{11}, -\frac{57}{11}, \frac{9}{11}\}$	$\{3, 9, 3\}$	$\{3, 9, 3\}$	$\{3, 9, 3\}$	$\{3, 9, 3\}$

(Az első sorban az 1-5 kérdések válaszai vannak, stb.. Továbbá {} zárójelekben vannak a vektorok.)

0.2. Pontok, egyenesek, síkok

Adott három pont

$$P = (0, 2, 4), \quad Q = (1, 1, 4), \quad S = (3, 2, 6)$$

az $\mathbb{R}^3$ Euklideszi vektortérben egy ortonormált bázisban.

1. Írd fel a P és Q pontokat tartalmazó egyenes

   (a) parametrikus,

$$\bar{v} = Q - P = (1, -1, 0),$$
$$\bar{r}(t) = P + t \cdot \bar{v} = (t, 2 - t, 4).$$

   (b) illetve algebrai egyenleteit!

$$x = t, \quad 2 - t = y, \quad z = 4,$$
$$t = x, \quad t = 2 - y, \qquad \text{igy az egyenest meghatazozo ket egyenlet:}$$
$$x = 2 - y, \qquad z = 4.$$

   (c) Hol van az $O = (0, 0, 0)$-hoz legközelebbi $K = \bar{r}(t_0)$ pont az egyenesen?

$$0 = \bar{r}(t_0)\bar{v} = (t_0, 2 - t_0, 4)(1, -1, 0) = -2 + 2t_0 \quad \Longrightarrow \quad t_0 = 1,$$
$$K = \bar{r}(1) = (1, 1, 4).$$

   (d) Mennyi az egyenes távolsága az O origótól?

$$|(1, 1, 4)| = 3\sqrt{2}.$$

   (e) Hol van az S-hez legközelebbi pont az egyenesen?

$$0 = (S - \bar{r}(t_0))\bar{v} = (3 - t_0, t_0, 2)(1, -1, 0) = 3 - 2t_0 \quad \Longrightarrow \quad t_0 = 3/2,$$
$$K = \bar{r}(3/2) = (3/2, 1/2, 4).$$

   (f) Mennyi az egyenes távolsága S-tol?

$$|\overline{SK}| = |(3/2, 1/2, 4) - (3, 2, 6)| = \sqrt{17/2}.$$

   Gyakorlás

   Ismételd meg a feladatot!

   I.

$$P = (1, 2, 2), \quad Q = (5, 3, 1), \quad S = (3, 0, 6)$$

   Megoldás:

$$\bar{r}(t) = \{4t + 1, t + 2, 2 - t\}, \qquad \frac{x - 1}{4} = y - 2 = 2 - z, \qquad \left\{\frac{1}{9}, \frac{16}{9}, \frac{20}{9}\right\},$$
$$\frac{\sqrt{73}}{3}, \quad \left\{\frac{13}{9}, \frac{19}{9}, \frac{17}{9}\right\}, \quad \frac{\sqrt{214}}{3}$$

2.

$$P = (0, 2, 4), \quad Q = (1, 1, 4), \quad R = (1, 0, 1), \quad S = (3, 2, 6)$$

   Keresd meg a P, Q, R pontokat tartalmazó síkot! Írd fel a sík

   (a) parametrikus,

$$\bar{a} = Q - P = (0, -1, 2), \quad \bar{b} = R - P = (0, 2, -1),$$
$$\bar{r}(u, v) = (1, 2 - u - 2v, 2 + 2u - v).$$

   (b) illetve algebrai egyenleteit!

$$\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b} = (5, -3, 1),$$
$$0 = \bar{n}\,[\bar{r} - P] = (5, -3, 1)(x - 0, y - (-1), z - 4),$$
$$5x - 3y + z - 6 = 0.$$

(c) Mennyi az sík távolsága az origótól?
P-nek a $\bar{p}_m$ merőleges vetülete $\bar{n}$-re

$$\bar{p}_m = \frac{\bar{n}P}{|\bar{n}|^2}\cdot\bar{n} = \left(\frac{6}{7}, -\frac{18}{35}, \frac{6}{35}\right), \qquad \text{tavolsag} = |\bar{p}_m| = \frac{\bar{n}P}{|\bar{n}|} = \frac{6}{\sqrt{35}}.$$

Persze $\bar{p}_m = \bar{q}_m = \bar{r}_m$.

(d) Hol van O merőleges vetülete a síkon?
Ahol $\bar{p}_m = \left(\frac{6}{7}, -\frac{18}{35}, \frac{6}{35}\right)$.

(e) Hol van O-nak a síkra történő merőleges tükrözöttje?
Ahol $2\bar{p}_m = \left(\frac{12}{7}, -\frac{36}{35}, \frac{12}{35}\right)$.

(f) Hol van S-nek a $\bar{s}_{sik}$ merőleges vetülete a síkon?
S-nek a $\bar{s}_{sik}$ merőleges vetülete $\bar{n}$-re

$$\bar{s}_m = \frac{\bar{n}S}{|\bar{n}|^2}\cdot\bar{n} = \left(\frac{15}{7}, -\frac{9}{7}, \frac{3}{7}\right),$$

$$\bar{s}_{sik} = S - (\bar{s}_m - \bar{p}_m) = \left(\frac{12}{7}, \frac{97}{35}, \frac{201}{35}\right)$$

(g) Mennyi az sík távolsága S-tol?

$$|\bar{s}_m - \bar{p}_m| = \frac{\bar{n}(S-P)}{|\bar{n}|} = \frac{9}{\sqrt{35}}$$

(h) Hol van S-nak a síkra történő merőleges tükrözöttje?

$$\bar{s}_{sik} = S - 2(\bar{s}_m - \bar{p}_m) = \left(\frac{3}{7}, \frac{124}{35}, \frac{192}{35}\right)$$

Gyakorlás

Ismételd meg a feladatot!

I.

$$P = (1,2,2), \quad Q = (1,3,1), \quad R = (0,2,-4), \quad S = (3,0,-1)$$

Megoldás:

$$\bar{r}(u,v) = (1-v, 2+u, 2-u-6v), \quad 2-6x+y+z=0, \quad \sqrt{2/19}, \quad (6/19, -(1/19), -(1/19)),$$
$$(12/19, -(2/19), -(2/19)), \quad (6/19, 17/38, -(21/38)), \quad 17/\sqrt{38}, \quad (-(45/19), 17/19, -(2/19))$$

3. Mennyi a $PQRST$ tetraéder térfogata?

$$\bar{a} = Q-P = (-1,-1,2), \quad \bar{b} = R-P = (-1,-2,-1), \quad \bar{c} = (1,0,4),$$
$$\text{Terfogat} = \frac{|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|}{6} = \frac{3}{2}$$

4. Hol van a PQR sík, továbbá az S és az $(1,2,3)$ pontokon áthaladó egyenes metszéspontja?
Egyenes paraméteres egyenlete
$$\bar{r}(t) = (3+2t, 2, 6+3t).$$
Sík algebrai egyenlete
$$-6+5x-3y+z=0.$$
Ha metszéspontnál t értéké t_0, akkor
$$-6+5\cdot(3+2t_0) - 3\cdot(2) + (6+3t_0) = 0, \quad \Longrightarrow \quad t_0 = -9/13.$$
A metszéspont
$$\bar{r}(-9/13) = \left(\frac{21}{13}, 2, \frac{51}{13}\right).$$

0.3. Lineáris transzformációk

1. Legyen $\phi\left((x,y)^T\right) = (2x+3y,\, 4x+5y)^T$ és $\psi\left((x,y,z)^T\right) = (z, y-x)^T$.

   (a) Mennyi a ϕ transzformáció F mátrixa?

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 4x+5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

   (b) Mennyi a ψ transzformáció P mátrixa?

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z \\ y-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

   (c) Mennyi a $\mu(\bar{v}) = \phi(\psi(\bar{v})) = (\phi \circ \psi)(\bar{v})$ transzformáció M mátrixa?
   Mi köze van az eredménynek F és P-hez?

$$M = FP = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

   (d) Mennyi a $\nu(\bar{v}) = \psi(\phi(\bar{v})) = (\psi \circ \phi)(\bar{v})$ transzformáció N mátrixa?
   Mi köze van az eredménynek F és P-hez?

$$N = PF = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

   lenne, de nem lehet elvégezni a mátrixszorzást. A $\nu = \psi \circ \phi$ kompozíció sincs értelmezve.

2. Legyen $\phi((x,y)) = (2x+3y,\, 4x+5y)$ és $\psi((x,y,z)) = (z, y-x)$.

   (a) Mennyi a ϕ transzformáció F mátrixa?

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x+3y & 4x+5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} F$$

   (b) Mennyi a ψ transzformáció P mátrixa?

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z & y-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} P$$

   (c) Mennyi a $\mu(\bar{v}) = \phi(\psi(\bar{v})) = (\phi \circ \psi)(\bar{v})$ transzformáció M mátrixa?
   Mi köze van az eredménynek F és P-hez?

$$M = PF = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

   A mátrixos sorrendje az előző oszlopvektoros feladatokhoz kepést megfordult, és a felhasznált mátrixok az előzőek transzponáltjai.

   (d) Mennyi a $\nu(\bar{v}) = \psi(\phi(\bar{v})) = (\psi \circ \phi)(\bar{v})$ transzformáció N mátrixa?
   Mi köze van az eredménynek F és P-hez?

$$N = FP = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   lenne, de nem lehet elvégezni a mátrixszorzást. A $\nu = \psi \circ \phi$ kompozíció sincs értelmezve.

3. Legyenek a feladat $(x,y)^T$ vektorai az $\mathbb{R}^2$ Euklideszi vektortérben egy ortonormált bázisban megadva mint oszlopvektorok. Számítsd ki a következő transzformációk hatását az $\bar{e}_1 = (1,0)^T$ és a $\bar{e}_2 = (0,1)^T$ ortonormált bázisvektorokra, illetve írd fel a lin.tr. mátrixát!

   A megoldás elve: $A\bar{e}_1$ az A mátrix első oszlopa, míg $A\bar{e}_2$ az A mátrix második oszlopa. Így $A\bar{e}_1$, $A\bar{e}_2$-bol mint oszlopvektorokból felépíthető az A mátrix.

   (a) Az x tengelyre való merőleges vetítés,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) az y tengelyre való merőleges vetítés,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) az $x = y$ egyenesre való merőleges vetítés,

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(d) az x tengelyre való merőleges tükrözés,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(e) az y tengelyre való merőleges tükrözés,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(f) az $x = y$ egyenesre való merőleges tükrözés,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(g) az origóra való tükrözés,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(h) az x tengelyre való vetítés, ha a vetítés iránya párhuzamos az $x = y$ egyenessel,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) az x tengelyre való vetítés, ha a vetítés iránya párhuzamos az $x + y = 0$ egyenessel,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(j) a $\bar{n} = (\cos(30)^\circ, \sin(30)^\circ)^T$ vektorra való merőleges vetítés P_n mátrixa,

$$\bar{n} = \begin{pmatrix} \sqrt{3/2} \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

$$P_n = \bar{n} \otimes \bar{n} = \bar{n}\bar{n}^T = \begin{pmatrix} \sqrt{3/2} \\ 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3/2} & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

(k) a $\bar{n} = (\cos(30)^\circ, \sin(30)^\circ)$ vektorra való merőleges tükrözés T_n mátrixa.

$$T_n\bar{v} = 2P_n\bar{v} - \bar{v}, \quad \Longrightarrow \quad T_n = 2P_n - E,$$

$$T_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(l) 45° fokos elforgatás,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

(m) 30° fokos elforgatás.

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3/2} & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3/2} \end{pmatrix}$$

4. Legyenek a feladat $(x, y, z)^T$ vektorai az $\mathbb{R}^3$ Euklideszi vektortérben egy ortonormált bázisban megadva mint oszlopvektorok. Számítsd ki a következő transzformációk hatását az $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)^T$ $\bar{e}_2 = (0, 1, 0)^T$ és a $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)^T$ ortonormált bázisvektorokra, illetve írd fel a lin.tr. mátrixát!

(a) Az y tengelyre való merőleges vetítés,

$$\begin{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix}$$

(b) az z tengelyre való merőleges vetítés,

$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

(c) az xy síkra való merőleges vetítés,

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix}$$

(d) az y tengelyre való merőleges tükrözés,

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

(e) az $x = y$ síkra való merőleges tükrözés,

$$\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

(f) az origóra való tükrözés,

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

(g) az xy síkra való vetítés, ha a vetítés iránya párhuzamos a $(1, 0, 1)^T$ vektorral,

$$\begin{pmatrix} 1 & & -1 \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix}$$

(h) az x tengelyre való vetítés, ha a vetítés iránya párhuzamos az $x + z = 0$ síkkal,

$$\begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

(i) a $\bar{n} = (\cos(30)^\circ, 0, \sin(30)^\circ)$ vektorra való merőleges vetítés,

$$\bar{n} = \begin{pmatrix} \sqrt{3/2} \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

$$P_n = \bar{n} \otimes \bar{n} = \bar{n}\bar{n}^T = \begin{pmatrix} \sqrt{3/2} \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3/2} & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

(j) a $\bar{n} = (\cos(30)^\circ, 0, \sin(30)^\circ)$ vektorra való merőleges tükrözés,

$$T_n \bar{v} = 2P_n \bar{v} - \bar{v}, \quad \Longrightarrow \quad T_n = 2P_n - E,$$

$$T_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(k) merőleges vetítés az $x + y + z = 0$ síkra,

$$\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1\ 1\ 1)^T,$$

$$P_{sik} = E - \bar{n}\bar{n}^T = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

(l) merőleges tükrözés az $x + y + z = 0$ síkra.

$$\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1\ 1\ 1)^T,$$

$$T_{sik} = E - 2\bar{n}\bar{n}^T = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

5. Legyen $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$. Mennyi A, ha $A\bar{v}$ az a vektor, amelynek az

(a) i-edik eleme v_i szomszédainak (vagy szomszédjának, ha i 1 vagy 4) az átlaga?

$$A\bar{v} = \begin{pmatrix} v_2 \\ (v_1+v_3)/2 \\ (v_2+v_4)/2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

(b) i-edik eleme v_i szomszédainak az átlaga, ahol az első és az utolsó elemeket is szomszédoknak tekintjük?

$$A\bar{v} = \begin{pmatrix} (v_2+v_4) \\ (v_1+v_3)/2 \\ (v_2+v_4)/2 \\ (v_1+v_3)/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

(c) Ismételd meg a feladatot abban az esetben, ha a $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ és az $\bar{v}A$ vektorra érvényesek ugyanezek a feltételek!
Ha sorvektorokat használunk, akkor transzponálni kell az előző mátrixokat, de mivel azok szimmetrikusak a transzponálásra nézve, így semmi sem változik.

6. (Hasonlósági transzformáció) Egy nyúlpopulációban a nyulak mind Szilveszterkor születtek, továbbá az egy éves nyulak 3, míg az ennél idősebbek 4 újszülöttet szülnek Szilveszterenként. A populációt jellemezhetjük a December 31-én, éppen az új nyulak születése előtt megmert

- $\bar{v} = (e, o)^T_v$
- $\bar{w} = (e, p)^T_w$

vektorokkal. (Itt e az egyévesek, o az öreg nyulak, míg p a teljes populáció létszámát jelölik. Az v, w indexek azt jelzik, hogy melyik koordináta rendszert használjuk ugyanannak a populációnak a leírására.)

(a) Ha a nyúlpopulációt leíró vektorok $A\bar{v}$ és $B\bar{w}$ lesznek egy év múlva, akkor mennyi

- A és
- B ?

$$A_{v\leftarrow v}\bar{v} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{v\leftarrow v} \begin{pmatrix} e \\ o \end{pmatrix}_v, \qquad A_{v\leftarrow v} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{v\leftarrow v}$$

$$B_{w\leftarrow w}\bar{w} = \begin{pmatrix} 3e+4(p-e) \\ p+[3e+4(p-e)] \end{pmatrix}_w = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}_{w\leftarrow w} \begin{pmatrix} e \\ o \end{pmatrix}_w, \qquad B_{w\leftarrow w} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{w\leftarrow w}$$

(b) Ha $\bar{v} = S\bar{w}$, akkor mennyi S ?

$$\begin{pmatrix} e \\ o \end{pmatrix}_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{v\leftarrow w} \begin{pmatrix} e \\ p \end{pmatrix}_w = S_{v\leftarrow w}\bar{w}$$

(c) Ha $\bar{w} = R\bar{v}$, akkor mennyi R ?

$$\begin{pmatrix} e \\ p \end{pmatrix}_w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{w\leftarrow v} \begin{pmatrix} e \\ o \end{pmatrix}_v = R_{w\leftarrow v}\bar{v}$$

(d) Mi köze van S-nek R-hez?

$$S^{-1} = R, \qquad R^{-1} = S, \qquad RS = SR = E.$$

Valóban:

$$SR = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(e) Mi köze van R-nek és A-nak B-hez?

$$B_{w\leftarrow w} = R_{w\leftarrow v}A_{v\leftarrow v}S_{v\leftarrow w} = R_{w\leftarrow v}A_{v\leftarrow v}(R_{w\leftarrow v})^{-1}_{v\leftarrow w}$$

Valóban:

$$B = RAS = RAR^{-1},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(f) Mi köze van S-nek és B-nek A-hoz?

$$A_{v\leftarrow v} = S_{v\leftarrow w}B_{w\leftarrow w}R_{w\leftarrow v} = S_{v\leftarrow w}B_{w\leftarrow w}(S_{v\leftarrow w})^{-1}_{w\leftarrow v}$$

Valóban:

$$A = SBR = SBS^{-1},$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Legyen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
Mennyi $AB - BA + 3E$?
$$\begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$$

8. Legyen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
   - Mennyi $AB - 3E$?
$$\begin{pmatrix} -10 & -12 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
   - Mennyi $BA + 3E$?
$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

0.4. Inhomogén lin.tr. (affin tr.)

1. Legyen $\phi_{a,b}(x) = ax + b$. Ha $\phi_{a,b} \circ \phi_{c,d} = \phi_{e,f}$, akkor mennyi e és f ?
$$\begin{gathered} \phi_{a,b} \circ \phi_{c,d}(x) = \phi_{a,b}(\phi_{c,d}(x)) = \phi_{a,b}(cx + d) \\ = a(cx + d) + b = acx + (ad + b) = \phi_{ac,ad+b}(x), \\ e = ac, \qquad f = ad + b. \end{gathered}$$

2. Legyen $f(x) = 3x + 4,\ x_0 = 44$. Mennyi $f^n(x_0)$?
f fixpontja:
$$f(x_{fix}) = x_{fix}, \qquad x_{fix} = 3x_{fix} + 4 \quad \Longrightarrow \quad x_{fix} = -2.$$
Ha a fixpont az origó, akkor ebben a koordinátarendészében f homogén lineáris lesz, így
$$f^n(x_0) = 3^n(44 - (-2)) + (-2).$$

3. Legyen $f(x) = x + 4,\ x_0 = 6$. Mennyi $f^n(x_0)$?
Itt f-nek nincs fixpontja, viszont $f^n(x)$ egy számtani sorozat, így
$$f^n(x) = 6 + 4n.$$

4. Legyen $f(x) = 1.2x - 4$. Mennyi $f^n(99)$?
f fixpontja:
$$f(x_{fix}) = x_{fix}, \qquad x_{fix} = 1.2x_{fix} - 4 \quad \Longrightarrow \quad x_{fix} = 20.$$
Ha a fixpont az origó, akkor ebben a koordinátarendészében f homogén lineáris lesz, így
$$f^n(x_0) = 1.2^n(99 - 20) + 20.$$

5. Add meg az
$$\begin{pmatrix} 1.2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixnak a $\lambda = 1$ sajátértékéhez tartozó egyik sajátvektort!

$$\begin{pmatrix} 1.2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2x - 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$1.2 \cdot 20 - 4 = 20,$$

$$\begin{pmatrix} 1.2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tehát a $\bar{v}_1(20,1)^T$ vektor $\lambda = 1$ sajátértékű sajtvektora a feladat mátrixának. ($\bar{v}_1$ többszörösei szinten ilyen vektorok lennének.)

0.5. Linearitás, bilinearitas, multilinearitás

1. Legyen ϕ egy lineáris transzformáció, továbbá legyen

$$\phi(\bar{v}_1) = (1,2,3)^T, \quad \phi(\bar{v}_2) = (3,2,1)^T.$$

Mennyi $\phi(4\bar{v}_1 - 5\bar{v}_2)$?
A linearitás miatt

$$\phi(4\bar{v}_1 - 5\bar{v}_2) = 4\phi(\bar{v}_1) - 5\phi(\bar{v}_2) = 4 \cdot (1,2,3)^T - 5 \cdot (3,2,1)^T = (-11,-2,7)^T$$

2. Legyen $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ egy olyan szimmetrikus bilineáris lekepézés (függvény), hogy

$$\phi(\bar{v}_1, \bar{v}_1) = 3, \quad \phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = 4, \quad \phi(\bar{v}_2, \bar{v}_2) = 7.$$

Mennyi $\phi(2\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2, \bar{v}_1 - \bar{v}_2)$?A bilinearitas miatt

$$\phi(2\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2, \bar{v}_1 - \bar{v}_2)$$
$$= (2 \cdot 1 \cdot 3) \cdot \phi(\bar{v}_1, \bar{v}_1) + (2 \cdot (-1) \cdot 4)\phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2) + (3 \cdot 1 \cdot 4)\phi(\bar{v}_2, \bar{v}_1) + (3 \cdot (-1) \cdot 7)\phi(\bar{v}_2, \bar{v}_2)$$

A szimmetria miatt $\phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = \phi(\bar{v}_2, \bar{v}_1) = 4$, így a végeredmény -93.

3. Legyen $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ egy olyan szimmetrikus bilineáris lekepézés (függvény), hogy

$$\phi(\bar{v}_1, \bar{v}_1) = 3, \quad \phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = \phi(\bar{v}_2, \bar{v}_1) = 4, \quad \phi(\bar{v}_2, \bar{v}_2) = 7.$$

- Mennyi $\phi(\bar{v}_1 - \bar{v}_2, \bar{v}_1 - \bar{v}_2)$?
- (Koszinusz tétel) Legyen adott egy háromszög, amelynek két oldala $\sqrt{3}$ és $\sqrt{7}$ hosszúak, továbbá a közbezárt szögük koszinusza $4/(\sqrt{3} \cdot \sqrt{7})$. Mennyi a harmadik oldal? (Ez nem lesz a zh-ban.)

4. Legyen $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ egy olyan antiszimmetrikus bilineáris lekepézés (függvény), hogy $\phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = 13$. Mennyi $\phi(2\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2, \bar{v}_1 - \bar{v}_2)$?

5. Legyen $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ egy olyan antiszimmetrikus multilinearis lekepézés, hogy

$$\phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = (1,2,3)^T, \quad \phi(\bar{v}_1, \bar{v}_3) = (1,0,0)^T, \quad \phi(\bar{v}_3, \bar{v}_2) = (0,0,3)^T.$$

Mennyi $\phi(2\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2, \bar{v}_1 - \bar{v}_3)$?

6. Legyen $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ egy olyan antiszimmetrikus multilinearis leképezés, hogy

$$\phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) = 2.$$

Mennyi $\phi(2\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2, \bar{v}_1 - \bar{v}_3, 4\bar{v}_1 + 2\bar{v}_3)$?
Az antiszimmetria miatt a kifejezés kifejtésében a

$$0 = \phi(\bar{v}_A, \bar{v}_A, \bar{v}_B) = \phi(\bar{v}_A, \bar{v}_B, \bar{v}_A),$$

stb. típusú tagok eleve nullák, így

$$\phi(2\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2, \bar{v}_1 - \bar{v}_3, 4\bar{v}_1 + 2\bar{v}_3) = (3 \cdot 1 \cdot 2) \cdot \phi(\bar{v}_2, \bar{v}_1, \bar{v}_3) + (1 \cdot (-1) \cdot 4) \cdot \phi(\bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_1)$$

Továbbá $\phi(\bar{v}_2, \bar{v}_1, \bar{v}_3) = -\phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) = -2$, mivel a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

permutáció páratlan. Hasonlóan ehhez a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

permutáció páros, így

$$2 = \phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) = \phi(\bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_1).$$

Tehát a végeredmény $6 \cdot (-2) - 4 \cdot 2 = -20$.

0.6. Determináns, inverz mátrix

1. Legyen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}.$$
Adj meg egy olyan egyenletrendszert, aminek az egyértelmű megoldása x, y, u, v !
$$AA^{-1} = E,$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
vagyis
$$1x + 4y = 1 \qquad 1u + 4v = 0$$
$$3x + 2y = 0 \qquad 3u + 4v = 1$$
vagy
$$A^{-1}A = E,$$
$$\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
vagyis
$$1x + 3u = 1 \qquad 4x + 2u = 0$$
$$1y + 3v = 0 \qquad 4y + 2v = 1$$

2. Legyen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Mennyi $(A^{-1})_{21}$, ha az indexálás 1-tol kezdődik? ?
$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$
Most toroljuk ki A-bol a 12-és elem (nem a 21-es!) sorát es oszlopát:
$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 3 & * & 1 \\ 1 & * & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Így
$$(A^{-1})_{21} = \frac{1}{\det(A)}(-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{-2}(-1)^{1+2} \cdot (3 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = 1$$
Megjegyzés: Valóban
$$(A^{-1} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \\ 1 & 2 & -7 \\ -(1/2) & -(3/2) & 5 \end{pmatrix}$$

3. Legyen
$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$
Mennyi A^{-1} ?
A ortogonális mátrix, mivel az oszlopai skalárszorzatai 1 vagy nulla, attól függően, hogy az oszlopvektort önmagával, vagy egy másik oszloppal szorozzuk össze skalárisan. Így
$$A^{-1} = A^T = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

4. Legyen
$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Mennyi A^{-1} ?
Mivel A ortogonális mátrix, így

$$A^{-1} = A^T = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ +\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Mennyi A^{-1} ?

5. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mennyi A^{-1} ?

6. Mennyi

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

7. Mennyi

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

8. • Mennyi x, ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & x & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\det(B) = -6 + x, \qquad |B| = 0 \implies x = 6.$$

• Legyen

$$\bar{a} = (1,2,0), \quad \bar{b} = (3,x,0), \quad \bar{c} = (0,1,1).$$

Mennyi x, ha ezek a vektorok nem alkotnak bázist?
$x = 6$, mivel ezek a vektorok a mátrixunk sorai.

• Legyen

$$\bar{a} = (1,3,0)^T, \quad \bar{b} = (2,x,1)^T, \quad \bar{c} = (0,0,1)^T.$$

Mennyi x, ha ezek a vektorok nem alkotnak bázist?$x = 6$, mivel ezek a vektorok a mátrixunk oszlopai.

9. Mennyi x, ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & x & x \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

10. Mennyi λ, ha

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) - 2 \cdot 0 = 0 \quad \implies \quad \lambda = 1.$$

11. Mennyi λ, ha

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) - 2 \cdot 4 = 0 \quad \implies \quad \lambda = 1 \pm 2\sqrt{2}.$$

12. Milyen paritásúak a következő permutációk?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

páros, páratlan, páratlan, páratlan

13. És végűl keresd meg a hibákat a feladatsor megoldásaiban!