Lin.Alg.Zh.1 feladatok

0.1. 3d vektorok

Adott három vektor

$$\bar{a} = (0, 2, 4), \quad \bar{b} = (1, 1, 4), \quad \bar{c} = (0, 2, -4)$$

az $\mathbb{R}^3$ Euklideszi vektortérben egy ortonormált bázisban.

1. Mennyi az $\bar{a}\bar{b}$ skalárszorzat?
2. Mennyi az $\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b}$ vektoriális szorzat?
3. Mennyi az $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ vegyesszorzat?
4. Merőleges-e egymásra $\bar{a}$ és $\bar{b}$? Miért?
5. Egy síkba esik-e $\bar{a}$, $\bar{b}$ és $\bar{c}$? Miért?
6. Mennyi az $\bar{a}$, $\bar{b}$ vektorok által bezárt szög koszinusza?
7. Mennyi az $\bar{a}$ ess $\bar{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe?
8. Mennyi az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektorok által kifeszített háromszög területe?
9. Mennyi az $\bar{a}$, $\bar{b}$ és $\bar{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata?
10. Mennyi az $\bar{a}$, $\bar{b}$ és $\bar{c}$ vektorok által kifeszített tetraéder térfogata?
11. Milyen sodrású az $\bar{a}$, $\bar{b}$ és $\bar{c}$ vektorok által alkotott rendszer? Miért?
12. Bázist alkot-e $\bar{a}$, $\bar{b}$ és $\bar{c}$? Miért?
13. Mennyi $\bar{c}$-nek a $\bar{c}_p$ merőleges vetülete $\bar{c}$-re?
14. Mennyi $\bar{c}$-nek a $\bar{c}_p$ merőleges vetülete $\bar{a}$-re?
15. Mennyi $\bar{c}$-nek a $\bar{c}_t$ merőleges tükrözöttje $\bar{c}$-re?
16. Mennyi $\bar{c}$-nek a $\bar{c}_t$ merőleges tükrözöttje $\bar{a}$-re?
17. Mennyi $\bar{c}$-nek a $\bar{c}_p$ merőleges vetülete a $\bar{c}$ és a $\bar{a}$ vektorok által generált síkra?
18. Mennyi $\bar{c}$-nek a $\bar{c}_p$ merőleges vetülete a $\bar{a}$ és a $\bar{b}$ vektorok által generált síkra?
19. Mennyi $\bar{c}$-nek a $\bar{c}_t$ merőleges tükrözöttje a $\bar{c}$ és a $\bar{a}$ vektorok által generált síkra?
20. Mennyi $\bar{c}$-nek a $\bar{c}_t$ merőleges tükrözöttje a $\bar{a}$ és a $\bar{b}$ vektorok által generált síkra?

Gyakorlás

Ismételd meg a feladatot!

I.

$$\bar{a} = (3, 1, 1), \quad \bar{b} = (0, 4, 1), \quad \bar{c} = (1, 1, -5)$$

Megoldás:

5	$\{-3, -3, 12\}$	-66	nem	nem
$\frac{5}{\sqrt{187}}$	$9\sqrt{2}$	$\frac{9}{\sqrt{2}}$	66	11
bal	igen	$\{1, 1, -5\}$	$\left\{-\frac{3}{11}, -\frac{1}{11}, -\frac{1}{11}\right\}$	$\{1, 1, -5\}$
$\left\{-\frac{17}{11}, -\frac{13}{11}, \frac{53}{11}\right\}$	$\{1, 1, -5\}$	$\left\{-\frac{2}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{1}{9}\right\}$	$\{1, 1, -5\}$	$\left\{-\frac{13}{9}, -\frac{13}{9}, \frac{43}{9}\right\}$

II.

$$\bar{a} = (3,1,1), \quad \bar{b} = (0,4,1), \quad \bar{c} = (3,9,3)$$

Megoldás:

5	$\{-3,-3,12\}$	0	nem	igen
$\frac{5}{\sqrt{187}}$	$9\sqrt{2}$	$\frac{9}{\sqrt{2}}$	0	0
nem bazis	nem	$\{3,9,3\}$	$\{\frac{63}{11},\frac{21}{11},\frac{21}{11}\}$	$\{3,9,3\}$
$\{\frac{93}{11},-\frac{57}{11},\frac{9}{11}\}$	$\{3,9,3\}$	$\{3,9,3\}$	$\{3,9,3\}$	$\{3,9,3\}$

(Az első sorban az 1-5 kérdések válaszai vannak, stb.. Továbbá {} zárójelekben vannak a vektorok.)

0.2. Pontok, egyenesek, síkok

Adott három pont

$$P = (0,2,4), \quad Q = (1,1,4), \quad S = (3,2,6)$$

az $\mathbb{R}^3$ Euklideszi vektortérben egy ortonormált bázisban.

1. Írd fel a P és Q pontokat tartalmazó egyenes
   (a) parametrikus,
   (b) illetve algebrai egyenleteit!
   (c) Hol van az $O = (0,0,0)$-hoz legközelebbi $K = \bar{r}(t_0)$ pont az egyenesen?
   (d) Mennyi az egyenes távolsága az O origótól?
   (e) Hol van az S-hez legközelebbi pont az egyenesen?
   (f) Mennyi az egyenes távolsága S-tol?

   Gyakorlás

   Ismételd meg a feladatot!

   I.

   $$P = (1,2,2), \quad Q = (5,3,1), \quad S = (3,0,6)$$

   Megoldás:

   $$\bar{r}(t) = \{4t+1, t+2, 2-t\}, \qquad \frac{x-1}{4} = y-2 = 2-z, \qquad \left\{\frac{1}{9}, \frac{16}{9}, \frac{20}{9}\right\},$$
   $$\frac{\sqrt{73}}{3}, \quad \left\{\frac{13}{9}, \frac{19}{9}, \frac{17}{9}\right\}, \quad \frac{\sqrt{214}}{3}$$

2.
   $$P = (0,2,4), \quad Q = (1,1,4), \quad R = (1,0,1), \quad S = (3,2,6)$$

   Keresd meg a P, Q, R pontokat tartalmazó síkot! Írd fel a sík
   (a) parametrikus,
   (b) illetve algebrai egyenleteit!
   (c) Mennyi az sík távolsága az origótól?
   (d) Hol van O merőleges vetülete a síkon?
   (e) Hol van O-nak a síkra történő merőleges tükrözöttje?
   (f) Hol van S-nek a $\bar{s}_{sik}$ merőleges vetülete a síkon?
   (g) Mennyi az sík távolsága S-tol?
   (h) Hol van S-nak a síkra történő merőleges tükrözöttje?

   Gyakorlás

   Ismételd meg a feladatot!

I.

$$P=(1,2,2),\quad Q=(1,3,1),\quad R=(0,2,-4),\quad S=(3,0,-1)$$

Megoldás:

$$\bar{r}(u,v)=(1-v,2+u,2-u-6v),\quad 2-6x+y+z=0,\quad \sqrt{2/19},\quad (6/19,-(1/19),-(1/19)),$$
$$(12/19,-(2/19),-(2/19)),\quad (6/19,17/38,-(21/38)),\quad 17/\sqrt{38},\quad (-(45/19),17/19,-(2/19))$$

3. Mennyi a $PQRST$ tetraéder térfogata?

4.

0.3. Lineáris transzformációk

1. Legyen $\phi\left((x,y)^T\right)=(2x+3y,\,4x+5y)^T$ és $\psi\left((x,y,z)^T\right)=(z,y-x)^T$.
   (a) Mennyi a ϕ transzformáció F mátrixa?
   (b) Mennyi a ψ transzformáció P mátrixa?
   (c) Mennyi a $\mu(\bar{v})=\phi(\psi(\bar{v}))=(\phi\circ\psi)(\bar{v})$ transzformáció M mátrixa? Mi köze van az eredménynek F és P-hez?
   (d) Mennyi a $\nu(\bar{v})=\psi(\phi(\bar{v}))=(\psi\circ\phi)(\bar{v})$ transzformáció N mátrixa? Mi köze van az eredménynek F és P-hez?

2. Legyen $\phi((x,y))=(2x+3y,\,4x+5y)$ és $\psi((x,y,z))=(z,y-x)$.
   (a) Mennyi a ϕ transzformáció F mátrixa?
   (b) Mennyi a ψ transzformáció P mátrixa?
   (c) Mennyi a $\mu(\bar{v})=\phi(\psi(\bar{v}))=(\phi\circ\psi)(\bar{v})$ transzformáció M mátrixa? Mi köze van az eredménynek F és P-hez?
   (d) Mennyi a $\nu(\bar{v})=\psi(\phi(\bar{v}))=(\psi\circ\phi)(\bar{v})$ transzformáció N mátrixa? Mi köze van az eredménynek F és P-hez?

3. Legyenek a feladat $(x,y)^T$ vektorai az $\mathbb{R}^2$ Euklideszi vektortérben egy ortonormált bázisban megadva mint oszlopvektorok. Számítsd ki a következő transzformációk hatását az $\bar{e}_1=(1,0)^T$ és a $\bar{e}_2=(0,1)^T$ ortonormált bázisvektorokra, illetve írd fel a lin.tr. mátrixát!

   A megoldás elve: $A\bar{e}_1$ az A mátrix első oszlopa, míg $A\bar{e}_2$ az A mátrix második oszlopa. Így $A\bar{e}_1$, $A\bar{e}_2$-bol mint oszlopvektorokból felépíthető az A mátrix.

   (a) Az x tengelyre való merőleges vetítés,
   (b) az y tengelyre való merőleges vetítés,
   (c) az $x=y$ egyenesre való merőleges vetítés,
   (d) az x tengelyre való merőleges tükrözés,
   (e) az y tengelyre való merőleges tükrözés,
   (f) az $x=y$ egyenesre való merőleges tükrözés,
   (g) az origóra való tükrözés,
   (h) az x tengelyre való vetítés, ha a vetítés iránya párhuzamos az $x=y$ egyenessel,
   (i) az x tengelyre való vetítés, ha a vetítés iránya párhuzamos az $x+y=0$ egyenessel,
   (j) a $\bar{n}=(\cos(30)^\circ,\sin(30)^\circ)^T$ vektorra való merőleges vetítés P_n mátrixa,
   (k) a $\bar{n}=(\cos(30)^\circ,\sin(30)^\circ)$ vektorra való merőleges tükrözés T_n mátrixa.
   (l) 45° fokos elforgatás,
   (m) 30° fokos elforgatás.

4. Legyenek a feladat $(x,y,z)^T$ vektorai az $\mathbb{R}^3$ Euklideszi vektortérben egy ortonormált bázisban megadva mint oszlopvektorok. Számítsd ki a következő transzformációk hatását az $\bar{e}_1=(1,0,0)^T\,\bar{e}_2=(0,1,0)^T$ és a $\bar{e}_3=(0,0,1)^T$ ortonormált bázisvektorokra, illetve írd fel a lin.tr. mátrixát!
   (a) Az y tengelyre való merőleges vetítés,
   (b) az z tengelyre való merőleges vetítés,
   (c) az xy síkra való merőleges vetítés,

(d) az y tengelyre való merőleges tükrözés,

(e) az $x = y$ síkra való merőleges tükrözés,

(f) az origóra való tükrözés,

(g) az xy síkra való vetítés, ha a vetítés iránya párhuzamos a $(1, 0, 1)^T$ vektorral,

(h) az x tengelyre való vetítés, ha a vetítés iránya párhuzamos az $x + z = 0$ síkkal,

(i) a $\bar{n} = (\cos(30)°, 0, \sin(30)°)$ vektorra való merőleges vetítés,

(j) a $\bar{n} = (\cos(30)°, 0, \sin(30)°)$ vektorra való merőleges tükrözés,

(k) merőleges vetítés az $x + y + z = 0$ síkra,

(l) merőleges tükrözés az $x + y + z = 0$ síkra.

5. Legyen $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$. Mennyi A, ha $A\bar{v}$ az a vektor, amelynek az

(a) i-edik eleme v_i szomszédainak (vagy szomszédjának, ha i 1 vagy 4) az átlaga?

(b) i-edik eleme v_i szomszédainak az átlaga, ahol az első és az utolsó elemeket is szomszédoknak tekintjük?

(c) Ismételd meg a feladatot abban az esetben, ha a $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ és az $\bar{v}A$ vektorra érvényesek ugyanezek a feltételek!

6. (Hasonlósági transzformáció) Egy nyúlpopulációban a nyulak mind Szilveszterkor születtek, továbbá az egy éves nyulak 3, míg az ennél idősebbek 4 újszülöttet szülnek Szilveszterenként. A populációt jellemezhetjük a December 31-én, éppen az új nyulak születése előtt megmert

- $\bar{v} = (e, o)_v^T$
- $\bar{w} = (e, p)_w^T$

vektorokkal. (Itt e az egyévesek, o az öreg nyulak, míg p a teljes populáció létszámát jelölik. Az v, w indexek azt jelzik, hogy melyik koordináta rendszert használjuk ugyanannak a populációnak a leírására.)

(a) Ha a nyúlpopulációt leíró vektorok $A\bar{v}$ és $B\bar{w}$ lesznek egy év múlva, akkor mennyi
  - A és
  - B ?

(b) Ha $\bar{v} = S\bar{w}$, akkor mennyi S ?

(c) Ha $\bar{w} = R\bar{v}$, akkor mennyi R ?

(d) Mi köze van S-nek R-hez?

(e) Mi köze van R-nek és A-nak B-hez?

(f) Mi köze van S-nek és B-nek A-hoz?

7. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Mennyi $AB - BA + 3E$?

8. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Mennyi $AB - 3E$?
- Mennyi $BA + 3E$?

0.4. Inhomogén lin.tr. (affin tr.)

1. Legyen $\phi_{a,b}(x) = ax + b$. Ha $\phi_{a,b} \circ \phi_{c,d} = \phi_{e,f}$, akkor mennyi e és f ?

2. Legyen $f(x) = 3x + 4,\ x_0 = 44$. Mennyi $f^n(x_0)$?

3. Legyen $f(x) = x + 4,\ x_0 = 6$. Mennyi $f^n(x_0)$?

4. Legyen $f(x) = 1.2x - 4$. Mennyi $f^n(99)$?

5. Add meg az

$$\begin{pmatrix} 1.2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixnak a $\lambda = 1$ sajátértékéhez tartozó egyik sajátvektort!

0.5. Linearitás, bilinearitas, multilinearitás

1. Legyen ϕ egy lineáris transzformáció, továbbá legyen

$$\phi(\bar{v}_1) = (1,2,3)^T, \quad \phi(\bar{v}_2) = (3,2,1)^T.$$

Mennyi $\phi(4\bar{v}_1 - 5\bar{v}_2)$?

2. Legyen $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ egy olyan szimmetrikus bilineáris lekepézés (függvény), hogy

$$\phi(\bar{v}_1, \bar{v}_1) = 3, \quad \phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = 4, \quad \phi(\bar{v}_2, \bar{v}_2) = 7.$$

Mennyi $\phi(2\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2, \bar{v}_1 - \bar{v}_2)$?

3. Legyen $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ egy olyan szimmetrikus bilineáris lekepézés (függvény), hogy

$$\phi(\bar{v}_1, \bar{v}_1) = 3, \quad \phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = \phi(\bar{v}_2, \bar{v}_1) = 4, \quad \phi(\bar{v}_2, \bar{v}_2) = 7.$$

- Mennyi $\phi(\bar{v}_1 - \bar{v}_2, \bar{v}_1 - \bar{v}_2)$?
- (Koszinusz tétel) Legyen adott egy háromszög, amelynek két oldala $\sqrt{3}$ és $\sqrt{7}$ hosszúak, továbbá a közbezárt szögük koszinusza $4/(\sqrt{3} \cdot \sqrt{7})$. Mennyi a harmadik oldal? (Ez nem lesz a zh-ban.)

4. Legyen $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ egy olyan antiszimmetrikus bilineáris lekepézés (függvény), hogy $\phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = 13$. Mennyi $\phi(2\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2, \bar{v}_1 - \bar{v}_2)$?

5. Legyen $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ egy olyan antiszimmetrikus multilinearis lekepézés, hogy

$$\phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = (1,2,3)^T, \quad \phi(\bar{v}_1, \bar{v}_3) = (1,0,0)^T, \quad \phi(\bar{v}_3, \bar{v}_2) = (0,0,3)^T.$$

Mennyi $\phi(2\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2, \bar{v}_1 - \bar{v}_3)$?

6. Legyen $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ egy olyan antiszimmetrikus multilinearis leképezés, hogy

$$\phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) = 2.$$

Mennyi $\phi(2\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2, \bar{v}_1 - \bar{v}_3, 4\bar{v}_1 + 2\bar{v}_3)$?

0.6. Determináns, inverz mátrix

1. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}.$$

Adj meg egy olyan egyenletrendszert, aminek az egyértelmű megoldása x, y, u, v !

2. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mennyi $(A^{-1})_{21}$, ha az indexálás 1-tol kezdődik? ?

3. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Mennyi A^{-1} ?

4. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Mennyi A^{-1} ?

Mennyi A^{-1} ?

5. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mennyi A^{-1} ?

6. Mennyi
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

7. Mennyi
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

8.
   - Mennyi x, ha
   $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & x & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$
   - Legyen
   $$\bar{a} = (1, 2, 0), \quad \bar{b} = (3, x, 0), \quad \bar{c} = (0, 1, 1).$$
   Mennyi x, ha ezek a vektorok nem alkotnak bázist?
   - Legyen
   $$\bar{a} = (1, 3, 0)^T, \quad \bar{b} = (2, x, 1)^T, \quad \bar{c} = (0, 0, 1)^T.$$
   Mennyi x, ha ezek a vektorok nem alkotnak bázist?

9. Mennyi x, ha
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & x & x \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

10. Mennyi λ, ha
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

11. Mennyi λ, ha
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

12. Milyen paritásúak a következő permutációk?
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. És végűl keresd meg a hibákat a feladatsor megoldásaiban!