Feladatsor 3. $\boxed{70}$

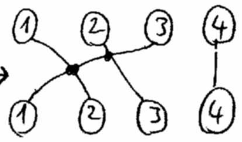
① Számold ki pivotálással A determinánsát!

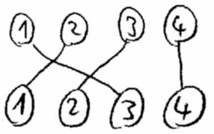
$$A=\begin{bmatrix}2&0&1&3\\1&1&0&1\\2&0&3&1\\3&1&2&4\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ \hline e_1 & 2 & 0 & 1 & 3\\ e_2 & 1_p & 1 & 0 & 1\\ e_3 & 2 & 0 & 3 & 1\\ e_4 & 3 & 1 & 2 & 4\end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ \hline e_1 & 0 & -2 & 1_p & 1\\ a_1 & 1 & 1 & 0 & 1\\ e_3 & 0 & -2 & 3 & -1\\ e_4 & 0 & -2 & 2 & 1\end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ \hline a_3 & 0 & -2 & 1 & 1\\ a_1 & 1 & 1 & 0 & 1\\ e_3 & 0 & 4 & 0 & -4\\ e_4 & 0 & 2 & 0 & -1_p\end{array} \longrightarrow$$

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ \hline a_3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ a_1 & 1 & 3 & 0 & 0\\ e_3 & 0 & -4_p & 0 & 0\\ a_4 & 0 & -2 & 0 & 1\end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ \hline a_3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ a_1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ a_2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}$$

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}=\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}=1$$





Tehát

$$\det(A)=1_p\cdot 1_p\cdot(-1)_p\cdot(-4)_p\cdot 1=4$$

ezt a permutációt reprezentálja $\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

Ezt pedig könnyebb leolvasni:

$\begin{matrix}a_3\\a_1\\a_2\\a_4\end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&2&3&4\\ \boxed{3\ 1\ 2\ 4}\end{pmatrix}$

kettő kereszteződés:
$\operatorname{sgn}(\text{permutáció})=(-1)^{\text{kettő}}=1$

② Számold ki pivotálással A inverzét!

$$A=\begin{bmatrix}2&0&1\\1&2&0\\0&2&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & e_1 & e_2 & e_3\\ \hline e_1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ e_2 & 1_p & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ e_3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & e_1 & e_2 & e_3\\ \hline e_1 & 0 & -4 & 1 & 1 & -2 & -1\\ a_1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ e_3 & 0 & 2 & 1_p & 0 & 0 & 1\end{array} \longrightarrow$$

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & e_1 & e_2 & e_3\\ \hline e_1 & 0 & -6 & 0 & 1 & -2 & -1\\ a_1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ a_3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & e_1 & e_2 & e_3\\ \hline a_2 & 0 & 1 & 0 & -1/6 & 1/3 & 1/6\\ a_1 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & -1/3\\ a_3 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 2/3\end{array}$$

A sorok $\begin{matrix}a_2\\a_1\\a_3\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}a_1\\a_2\\a_3\end{matrix}$ permutációja után:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1/3&1/3&-1/3\\-1/6&1/3&1/6\\1/3&-2/3&2/3\end{bmatrix}.$$

Az első sor elemeinek az összege:

$$\boxed{1/3+1/3+(-1/3)}=\frac{1}{3}.$$

③ Oldd meg pivotálással az $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ egyenletet!

Mennyi x_1?

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline e_1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ e_2 & 1_p & 2 & 0 & -2 \\ e_3 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline e_1 & 0 & -4 & 1 & 5 \\ a_1 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ e_3 & 0 & 2 & 1_p & -1 \end{array} \longrightarrow$$

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline e_1 & 0 & -6_p & 0 & 6 \\ a_1 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ a_3 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline a_2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \boxed{a_1} & 1 & 0 & 0 & \boxed{0} \\ a_3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Mivel a kérdés x_1, így az a_1 sor, b oszlop eleme a válasz:
$x_1 = \boxed{0}$!

Tehát $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, ami azt jelenti, hogy $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

④ Oldd meg pivotálással az $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ egyenletet!

Mennyi $\dfrac{|x_1|}{|x_1|+|x_2|+|x_3|}$, ha $\vec{x} \neq \vec{0}$?

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline e_1 & 0 & 1_p & 2 & 0 \\ e_2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ e_3 & -4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline a_2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ e_2 & 2 & 0 & 1_p & 0 \\ e_3 & -4 & 0 & -2 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline a_2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

A pivotálás tovább nem folytatható, mivel e_3 sora csupa nulla.
(Megjegyzés: homogén egyenletnél a b oszlop felesleges, hiszen mindig csupa nulla marad.)

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline a_2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Triviális oszlop: $\vec{x} = \vec{0}$ megoldás

Triviális oszlopok: $\vec{a}_2 = 0\vec{a}_1 + 1\vec{a}_2 + 0\vec{a}_3$
$\vec{a}_3 = 0a_1 + 0\vec{a}_2 + 1\vec{a}_3$

Nemtriviális oszlop:
$\vec{a}_1 = -4\vec{a}_2 + 2\vec{a}_3 + 0\vec{e}_3$

vagyis $\vec{0} = (-1)\vec{a}_1 + (-4)\vec{a}_2 + 2\vec{a}_3$

tehát az egyenletrendszer egy megoldása: $\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$. Az általános megoldás

$\vec{x}_{ált} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$. Így $\dfrac{|x_1|}{|x_1|+|x_2|+|x_3|} = \dfrac{|-1|}{|-1|+|-4|+|2|} = \dfrac{1}{7}$

⑤. Legyen $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$. Mennyi $(A^{-1})_{12}$, ha tudjuk, hogy $\det(A)=1$? $\boxed{72}$

$$(A^{-1})_{ij}=\frac{(-1)^{i+j}}{\det A}\det(\hat{A}_{ji}),$$ ahol $\hat{A}_{ji}$ az A mátrix a j-edik sor és az i-edik oszlop elhagyása után.

Tehát esetünkben $\hat{A}_{21}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 8 \end{bmatrix} \longleftarrow \begin{bmatrix} \cancel{1} & 2 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{-1} \\ \cancel{-1} & 1 & 2 & -2 \\ \cancel{2} & -2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

Így $(A^{-1})_{12}=\dfrac{(-1)^{1+2}}{1}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 8 \end{vmatrix}=\left(2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\right)\cdot(-1)$

$=(2\cdot 18+1\cdot 12)\cdot(-1)=-40$

⑥ Legyen $A=\begin{bmatrix} 0.85019 & -0.41363 & 0.32569 \\ 0.45972 & 0.88476 & -0.07641 \\ 0.25655 & 0.21470 & 0.94238 \end{bmatrix}$ egy ortogonális mátrix.

Mennyi $(A^{-1})_{23}$?

Ha A ortogonális (vagyis az oszlopai egy ortonormált bázist alkotnak) akkor $A^{-1}=A^T$, vagyis $(A^{-1})_{23}=A_{32}=0.21470$.

⑦ Legyen $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Mennyi A^{-1} első oszlopának az elemeinek az összege?

$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, így a válasz $1+(-2)+(-3)+(-4)=-8$

(8) Legyen $x_0=100$, $x_{n+1}=1.2x_n-3$. Mennyi x_{13}?

Fixpont: $x_f=1.2x_f-3 \longrightarrow x_f=\frac{3}{0.2}=15$

$$x_n=1.2^n(100-15)+15$$
$$x_{13}=1.2^{13}(100-15)+15=924.4422$$

(9) Legyen $A=\begin{bmatrix}2&3\\4&5\end{bmatrix}$. Keresd meg A sajátértékeit. Mennyi ezek különbségének az abszolút értéke?

$$0=\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}2-\lambda&3\\4&5-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(5-\lambda)-3\cdot4=\lambda^2-7\lambda-2=0$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49+8}}{2},\qquad |\lambda_1-\lambda_2|=\sqrt{57}\approx7.5498$$

(10) Legyen $A=\begin{bmatrix}5&7\\0&9\end{bmatrix}$. Keresd meg A nagyobbik sajátértékéhez tartozó sajátvektorát!

(14) Keresd meg A sajátvektorai által bezárt nemnulla szög koszinuszának az abszolút értékét!

$$0=\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}5-\lambda&7\\0&9-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)(9-\lambda)-7\cdot0\longrightarrow\lambda_1=5,\ \lambda_2=9$$

$\lambda_1=5$: $\begin{bmatrix}5-5&7\\0&9-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&7\\0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{matrix}7y=0\\4y=0\end{matrix}\rightarrow y=0,\ \vec{V}_1=\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}$

$\lambda_2=9$: $\begin{bmatrix}5-9&7\\0&9-9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&7\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\rightarrow -4x+7y=0\rightarrow y=\frac{4}{7}x,\ \vec{V}_2=\begin{bmatrix}x\\\frac{4}{7}x\end{bmatrix}$

bázis: $\lambda_1=5$, $\vec{V}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\lambda_2=9$, $\vec{V}_2=\begin{bmatrix}1\\4/7\end{bmatrix}$

(10) Válasz: $9>5$, $(\vec{V}_2)_1/(\vec{V}_2)_2=1/(4/7)=\frac{7}{4}$

(14) Válasz: $|\cos\alpha|=\frac{|(\vec{V}_1,\vec{V}_2)|}{|\vec{V}_1|\cdot|\vec{V}_2|}=\frac{|1\cdot1+0\cdot\frac{4}{7}|}{\sqrt{1^2+0}\cdot\sqrt{1^2+(4/7)^2}}$

(11) Legyen $A=\begin{bmatrix}9&0\\7&5\end{bmatrix}$. Feladat ugyanaz mint (10) + (14).

(15)

$$0=\begin{vmatrix}9-\lambda&0\\7&5-\lambda\end{vmatrix}\longrightarrow\lambda_1=9,\ \lambda_2=5$$

bázis:

$\lambda_1=9$: $\begin{bmatrix}9-9&0\\7&5-9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\longrightarrow 7x-4y=0\rightarrow y=\frac{7}{4}x,\ \vec{V}_1=\begin{bmatrix}x\\\frac{7}{4}x\end{bmatrix}\longrightarrow V_1=\begin{bmatrix}1\\\frac{7}{4}\end{bmatrix}$

$\lambda_2=5$: $\begin{bmatrix}9-5&0\\7&5-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\longrightarrow 4x=0\rightarrow x=0,\ \vec{V}_2=\begin{bmatrix}0\\y\end{bmatrix}\longrightarrow V_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

(11) Válasz: $9>5$, $(\vec{V}_1)_1/(\vec{V}_1)_2=1/(\frac{7}{4})=\frac{4}{7}$

(15) Válasz: $|\cos\alpha|=\frac{|1\cdot0+(7/4)\cdot1|}{\sqrt{1^2+(7/4)^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2}}$

(12) Legyen $A=\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -9 & 2 \end{bmatrix}$. keresd meg A sajátértékei imaginárius részeinek az abszolút értékét! 74

$$0=\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 9 \\ -9 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)-9\cdot(-9)=\lambda^2-3\lambda+83.$$

Tehát $\lambda_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot83}}{2}=\dfrac{3}{2}\pm\dfrac{\sqrt{-342}}{2}=\dfrac{3}{2}\pm\dfrac{\sqrt{342}}{2}\cdot i$

Vagyis $|\operatorname{Im}\lambda_1|=|\operatorname{Im}\lambda_2|=\dfrac{1}{2}\sqrt{342}$

(13) Legyen $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Mennyi A sajátértékeinek a szorzata?

$$0=\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)^2-3\cdot3=\lambda^2-4\lambda-5$$

$\lambda^2-4\lambda-5=0 \longrightarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_2=5,$ tehát $\lambda_1\cdot\lambda_2=-1\cdot5=-5$