Pivotálás

egyenletmegoldás: $A\vec{x} = \vec{b}$

$$A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 = \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$$

$\vec{x}$ kiszámítása $\longleftrightarrow$ $\vec{b}$ kifejezése az $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorokkal $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ helyett

mindez három lépésben:

	bázis:	csere
$\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$	$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$	$\vec{e}_1 \leftarrow \vec{a}_1$
$= b_1'\vec{a}_1 + b_2'\vec{e}_2 + b_3'\vec{e}_3$	$\vec{a}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$	$\vec{e}_2 \leftarrow \vec{a}_2$
$= b_1''\vec{a}_1 + b_2''\vec{a}_2 + b_3''\vec{e}_3$	$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{e}_3$	$\vec{e}_3 \leftarrow \vec{a}_3$
$= b_1'''\vec{a}_1 + b_2'''\vec{a}_2 + b_3'''\vec{e}_3$	$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$	

eredmény: $\vec{x} = \begin{bmatrix} b_1''' \\ b_2''' \\ b_3''' \end{bmatrix}$

Példa:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

pivottábla:

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline e_1 & 1 & 2 & 3 & \boxed{4} \\ e_2 & 4 & 5 & 6 & \boxed{5} \\ e_3 & 7 & 8 & 2 & \boxed{6} \end{array}$$

itt pl. az utolsó oszlop jelentése: $\vec{b} = 4\cdot\vec{e}_1 + 5\cdot\vec{e}_2 + 6\cdot\vec{e}_3$

cél:

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline a_1 & 1 & 0 & 0 & \boxed{x} \\ a_2 & 0 & 1 & 0 & \boxed{x} \\ a_3 & 0 & 0 & 1 & \boxed{x} \end{array}$$

$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3$

Számítsuk ki pl. a $\vec{e}_2 \leftarrow \vec{a}_3$ csere hatását a táblázaton!

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline e_1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ e_2 & 4 & 5 & \boxed{6} & 5 \\ e_3 & 7 & 8 & 2 & 6 \end{array} \quad \xrightarrow{\vec{e}_2 \leftarrow \vec{a}_3} \quad \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline e_1 & * & * & 0 & * \\ a_3 & * & * & 1 & * \\ e_3 & * & * & 0 & * \end{array}$$

az $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{b}$ vektorok kifejezése $\vec{e}_1, \vec{a}_3, \vec{e}_3$ segítségével

$$\vec{a}_3 = 3\cdot\vec{e}_1 + 6\cdot\vec{e}_2 + 2\cdot\vec{e}_3 \longrightarrow \vec{e}_2 = \frac{1}{6}\left(\vec{a}_3 - 3\cdot\vec{e}_1 - 2\cdot\vec{e}_3\right)$$

így pl.
$$\vec{a}_1 = 1\cdot\vec{e}_1 + 4\cdot\vec{e}_2 + 7\cdot\vec{e}_3 = 1\cdot\vec{e}_1 + 4\cdot\frac{1}{6}\left(\vec{a}_3 - 3\cdot\vec{e}_1 - 2\cdot\vec{e}_3\right) + 7\cdot\vec{e}_3$$
$$= \left(1 - \frac{4\cdot 3}{6}\right)\vec{e}_1 + \frac{4}{6}\vec{a}_3 + \left(7 - \frac{4\cdot 2}{6}\right)\vec{e}_3$$
$$= \frac{1\cdot 6 - 4\cdot 3}{6}\vec{e}_1 + \frac{4}{6}\vec{a}_3 + \frac{7\cdot 6 - 4\cdot 2}{6}\vec{e}_3$$

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline e_1 & \frac{1\cdot 6 - 4\cdot 3}{6} & * & 0 & * \\ a_3 & 4/6 & * & 1 & * \\ e_3 & \frac{7\cdot 6 - 4\cdot 2}{6} & * & 0 & * \end{array}$$

$$\vec{a}_3 = 0\cdot\vec{e}_1 + 1\cdot\vec{a}_3 + 0\cdot\vec{e}_3$$

Ugyanez az eljárás alkalmazandó az a_2, b oszlopokra is

Tehát az e_2 sorban és a_3 oszlopban álló $\boxed{6}$-os elemhez tartozó pivotálás hatása:

(1)
$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline e_1 & x & x & x & x \\ e_2 & x & x & \boxed{6} & x \\ e_3 & x & x & x & x \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline e_1 & x & x & 0 & x \\ a_3 & x & x & 1 & x \\ e_3 & x & x & 0 & x \end{array}$$

pivot elem oszlopa → 1, plusz néhány nulla

(2)
$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline e_1 & x & x & x & x \\ e_2 & 4 & 5 & \boxed{6} & 5 \\ e_3 & x & x & x & x \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline e_1 & x & x & x & x \\ a_3 & 4/6 & 5/6 & 1 & 5/6 \\ e_3 & x & x & x & x \end{array}$$

pivot elem sora → osszd el a pivotelemmel

(3)
$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline e_1 & x & x & x & x \\ e_2 & 4 & x & \boxed{6} & x \\ e_3 & 7 & x & 2 & x \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline e_1 & x & x & x & x \\ a_3 & x & x & x & x \\ e_3 & \frac{6\cdot 7-4\cdot 2}{6} & x & x & x \end{array}$$

a többi elem, pl.: $7 \longrightarrow \dfrac{\boxed{6}\cdot 7 - 4\cdot 2}{\boxed{6}}$

Tehát
$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline e_1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ e_2 & 4 & 5 & \boxed{6} & 5 \\ e_3 & 7 & 8 & 2 & 6 \end{array} \xrightarrow{\vec{e}_2 \leftarrow \vec{a}_3} \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline e_1 & \boxed{-1} & -1/2 & 0 & 3/2 \\ a_3 & 4/6 & 5/6 & 1 & 5/6 \\ e_3 & 17/3 & 19/3 & 0 & 13/3 \end{array} \xrightarrow{\vec{e}_1 \leftarrow \vec{a}_1}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline a_1 & 1 & 1/2 & 0 & -3/2 \\ a_3 & 0 & 1/2 & 1 & 11/6 \\ e_3 & 0 & \boxed{7/2} & 0 & 77/6 \end{array} \xrightarrow{\vec{e}_3 \leftarrow \vec{a}_2} \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline a_1 & 1 & 0 & 0 & -10/3 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 & 11/3 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{sor-permutáció}} \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline a_1 & 1 & 0 & 0 & -10/3 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 & 11/3 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array},$$

Vagyis $\vec{b} = -\frac{10}{3}\vec{a}_1 + \frac{11}{3}\vec{a}_2 + 0\vec{a}_3$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = -\frac{10}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} + \frac{11}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} + 0\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10/3 \\ 11/3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Megjegyzés: A numerikus hibaterjedés vagy pontatlan adatok miatt általában a legnagyobb kiválasztható elem a legalkalmasabb pivot.
Fejbenszámolásnál célszerű (ha vannak) a ± 1 pivot elemeket használni.

∞ vagy 0 megoldás

∞: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 17 \\ 26 \end{bmatrix}$ $\qquad A\vec{x} = \vec{b}$ $\qquad \left.\begin{matrix} A\vec{x}_{part} = \vec{b} \\ A\vec{x}_{hom} = \vec{0} \end{matrix}\right\} \Rightarrow A(\vec{x}_{part} + \vec{x}_{hom}) = \vec{b}$

Pivottábla:

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline e_1 & 1 & 2 & 3 & 8 \\ e_2 & 4 & 5 & \boxed{6} & 17 \\ e_3 & 7 & 8 & 9 & 26 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline e_1 & \boxed{-1} & -1/2 & 0 & -1/2 \\ a_3 & 2/3 & 5/6 & 1 & 17/6 \\ e_3 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline a_1 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ a_3 & 0 & 1/2 & 1 & 5/2 \\ e_3 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 \end{array}$$

Az utolsó $e_3 \leftarrow a_2$ cserét már nem tudjuk elvégezni a $\boxed{0}$ pivotelemmel.

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline a_1 & * & * & * & 1/2 \\ a_3 & * & * & * & 5/2 \\ e_3 & * & * & * & 0 \end{array} \iff \begin{matrix} \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a}_1 + \frac{5}{2}\vec{a}_3 + 0\vec{e}_3 \\ = \frac{1}{2}\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 + \frac{5}{2}\vec{a}_3 \end{matrix} \iff \vec{x}_{part} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 5/2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 5/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 17 \\ 26 \end{bmatrix}$$

Tehát a "b" oszlopból leolvasható egy darab (partikuláris) megoldás

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline a_1 & * & 1/2 & * & * \\ a_3 & * & 1/2 & * & * \\ e_3 & * & 0 & * & * \end{array} \iff \begin{matrix} \vec{a}_2 = \frac{1}{2}\vec{a}_1 + \frac{1}{2}\vec{a}_3 + 0\vec{e}_3, \\ \frac{1}{2}\vec{a}_1 - 1\cdot\vec{a}_2 + \frac{1}{2}\vec{a}_3 = \vec{0} \end{matrix} \iff \vec{x}_{hom_1} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az egyenlet rendszer általános megoldása: $\vec{x}_{ált} = \vec{x}_{part} + (\text{lin. kombinációja } \vec{x}_{hom_1}\text{-nek})$

$$t_1 \in \mathbb{R}, \qquad \vec{x}_{ált} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 5/2 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 + t_1 \cdot 1/2 \\ 0 + t_1 \cdot (-1) \\ 5/2 + t_1 \cdot 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 17 \\ 26 \end{bmatrix}$$

0 megoldás: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 17 \\ 25 \end{bmatrix}$

Pivottábla:

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline e_1 & 1 & 2 & 3 & 8 \\ e_2 & 4 & 5 & \boxed{6} & 17 \\ e_3 & 7 & 8 & 9 & 25 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline e_1 & \boxed{-1} & -1/2 & 0 & -1/2 \\ a_3 & 2/3 & 5/6 & 1 & 17/6 \\ e_3 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline a_1 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ a_3 & 0 & 1/2 & 1 & 5/2 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

Az $\boxed{e_3 \,|\, 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; -1}$ sor miatt nincs megoldás, hiszen $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a}_1 + \frac{5}{2}\vec{a}_3 - 1\cdot\vec{e}_3$, viszont $\vec{e}_3$ nem írható fel $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ lineáris kombinációjaként, vagyis $\vec{b}$ nem írható fel $\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3$ alakban.

Az egyenletrendszer megoldásának leolvasása az utolsó pivottáblából:

0 megoldás. példa:

	a_1	a_2	a_3	a_4	b
a_3	0	3	1	5	7
e_2	0	0	0	0	0
a_1	1	4	0	6	8
e_4	0	0	0	0	$\boxed{9}$

Itt a pivotálás nem folytatható tovább, mivel a e_2, e_4 sorokban az $a_{1,2,3,4}$ oszlopokban csupa 0 van. Viszont az e_4 sor $\boxed{9}$ eleme nem nulla, így $\vec{b}$ nem fejezhető ki az $\vec{a}_{1,2,3,4}$ vektorok lineáris kombinációjaként, vagyis NINCS megoldás.

∞ megoldás. példa:

	a_1	a_2	a_3	a_4	b
a_3	0	3	1	5	7
e_2	0	0	0	0	0
a_1	1	4	0	6	8
e_4	0	0	0	0	0

$\xrightarrow{\text{sor-permutáció}}$

	a_1	a_2	a_3	a_4	b
a_1	1	4	0	6	8
e_2	0	0	0	0	0
a_3	0	3	1	5	7
e_4	0	0	0	0	0

Itt az a_1, a_3 oszlopok "triviálisak": $\vec{a}_1 = 1\cdot\vec{a}_1 + 0\cdot\vec{e}_2 + 0\cdot\vec{a}_3 + 0\cdot\vec{e}_4$, $\vec{a}_3 = 0\cdot\vec{a}_1 + 0\cdot\vec{e}_2 + 1\cdot\vec{a}_3 + 0\cdot\vec{e}_4$

Mivel az e_2, e_4 sorokban csupa 0 van, így a b oszlopból leolvasható egy megoldás:

	...	b
a_1		8
e_2	...	0
a_3		7
e_4		0

$$\Longleftrightarrow \quad \vec{b} = 8\vec{a}_1 + 0\vec{e}_2 + 7\vec{a}_3 + 0\vec{e}_4 = 8\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 + 7\vec{a}_3 + 0\vec{a}_4 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{x}_{part} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A maradék a_2, a_4 oszlopok azt mutatják, hogy $\vec{a}_2, \vec{a}_4$ kifejezhető $\vec{a}_1$ és $\vec{a}_3$-mal:

	a_2	a_4
a_1	4	6
e_2	0	0
a_3	3	5
e_4	0	0

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \vec{a}_2 &= 4\vec{a}_1 + 0\vec{e}_2 + 3\vec{a}_3 + 0\vec{e}_4. \\ \vec{0} &= 4\vec{a}_1 - 1\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3 + 0\vec{a}_4. \\ \vec{a}_4 &= 6\vec{a}_1 + 0\vec{e}_2 + 5\vec{a}_3 + 0\vec{e}_4. \\ \vec{0} &= 6\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 + 5\vec{a}_3 - 1\vec{a}_4. \end{aligned} \qquad \vec{x}_{hom_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_{hom_2} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Az általános megoldás: $\vec{x}_{ált} = \vec{x}_{part} + t_1\vec{x}_{hom_1} + t_2\vec{x}_{hom_2} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad t_{1,2} \in \mathbb{R}$

Tehát $\vec{x}_{ált}$ generálása az utolsó sorpermutált pivottáblából:

	a_1	a_2	a_3	a_4	b
a_1	1	4	0	6	8
e_2	0	0	0	0	0
a_3	0	3	1	5	7
e_4	0	0	0	0	0

$$\vec{x}_{part} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}_{hom_2} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \\ \boxed{-1} \end{bmatrix} \qquad \vec{x}_{hom_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ \boxed{-1} \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\longleftarrow$ a_2, a_4 oszlopai + $\boxed{-1}$

∞ megoldás, még egy példa:

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & b \\ \hline \boxed{a_4} & 2 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{a_3} & 5 & 6 & 1 & 0 & 7 \end{array} \xrightarrow{\text{sor permutáció}} \begin{array}{c|ccccc} & \boxed{a_1} & \boxed{a_2} & a_3 & a_4 & \boxed{b} \\ \hline e_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{a_3} & 5 & 6 & 1 & 0 & 7 \\ \boxed{a_4} & 2 & 3 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

A sorpermutáció az $\boxed{a_4}$, $\boxed{a_3}$ sorok címkéit hozza a megfelelő pozíciókba.
a megoldás leolvasása a táblázat nemtriviális $\boxed{a_1}$, $\boxed{a_2}$, $\boxed{b}$ oszlopaiból:

$$\begin{array}{c} \boxed{b} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} \end{array} \longrightarrow \vec{x}_{part} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \boxed{a_1} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array} \longrightarrow \vec{x}_{hom_1} = \begin{bmatrix} \boxed{-1} \\ 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} \boxed{a_2} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array} \longrightarrow \vec{x}_{hom_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boxed{-1} \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

általános megoldás: $\vec{x}_{part} + (\vec{x}_{hom_1}$ és $\vec{x}_{hom_2}$ lineáris kombinációi$) = \vec{x}_{ált}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \vec{x}_{ált} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad t_1, t_2, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Még egy példa: Oldd meg az $\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 10 \end{array}$ egyenlet rendszert pivotálással!

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline e_1 & \boxed{2} & 3 & 4 & 5 \\ e_2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline a_1 & 1 & 3/2 & 2 & 5/2 \\ e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

a megoldás leolvasása:

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline a_1 & 1 & \boxed{3/2} & \boxed{2} & \boxed{5/2} \\ e_2 & 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline a_1 & 1 & 3/2 & 2 & 5/2 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \vec{x}_{ált} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 3/2 \\ \boxed{-1} \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 5/2 \\ 0 \\ \boxed{-1} \end{bmatrix}$$

Ugyanez pl. az $e_1 \overset{a_2}{\boxed{3}}$ pivotelemmel:

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline a_2 & 2/3 & 1 & 4/3 & 5/3 \\ e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ \hline a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 2/3 & 1 & 4/3 & 5/3 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \vec{x}_{ált} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5/3 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} \boxed{-1} \\ 2/3 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 4/3 \\ \boxed{-1} \end{bmatrix}$$

Inverz Mátrix

$$AA^{-1} = E$$

pl. $A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$

$$AA^{-1} = E \iff A\vec{x}_1 = \vec{e}_1, \quad A\vec{x}_2 = \vec{e}_2, \quad A\vec{x}_3 = \vec{e}_3$$

Példa: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} | \\ \vec{x}_1 \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} | \\ \vec{x}_2 \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} | \\ \vec{x}_3 \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

a probléma ugyanaz mint az $A\vec{x} = \vec{b}$ egyenletmegoldásnál, csak most $\vec{b} = \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

jobboldal

Pivottábla:

	a_1	a_2	a_3	e_1	e_2	e_3
e_1	1	2	3	1	0	0
e_2	4	5	$\boxed{6}$	0	1	0
e_3	7	8	2	0	0	1

$\longrightarrow$

	a_1	a_2	a_3	e_1	e_2	e_3
e_1	$\boxed{-1}$	$-1/2$	0	-1	$1/2$	0
a_3	$2/3$	$5/6$	1	$2/3$	$-1/6$	0
e_3	$17/3$	$19/3$	0	$17/3$	$-19/6$	1

$\longrightarrow$

	a_1	a_2	a_3	e_1	e_2	e_3
a_1	1	$1/2$	0	-1	$1/2$	0
a_3	0	$1/2$	1	$2/3$	$-1/6$	0
e_3	0	$\boxed{7/2}$	0	$17/3$	$-19/6$	1

$\longrightarrow$

	a_1	a_2	a_3	e_1	e_2	e_3
a_1	1	0	0	$-38/21$	$20/21$	$-1/7$
a_3	0	0	1	$-1/7$	$2/7$	$-1/7$
a_2	0	1	0	$34/21$	$-19/21$	$2/7$

sor-permutáció $\longrightarrow$

	a_1	a_2	a_3	e_1	e_2	e_3
a_1	1	0	0	$-38/21$	$20/21$	$-1/7$
a_2	0	1	0	$34/21$	$-19/21$	$2/7$
a_3	0	0	1	$-1/7$	$2/7$	$-1/7$

Tehát
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -38/21 & 20/21 & -1/7 \\ 34/21 & -19/21 & 2/7 \\ -1/7 & 2/7 & -1/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determináns

pivotálás hatása: ① a pivotelem sorát elosztjuk a pivotelemmel.

② a többi sorból kivonjuk a pivotelem sorának annyiszorosát, hogy a pivotelem fölötti elem nulla legyen.

pl. $$\begin{bmatrix} \cdots & 7 & \cdots & 8 & \cdots \\ \cdots & 5 & \cdots & \boxed{4} & \cdots \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \cdots & \frac{7\cdot 4-5\cdot 8}{4} & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & 5/4 & \cdots & 1 & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & 7-\frac{8}{4}\cdot 5 & \cdots & 8-\frac{8}{4}\cdot 4 & \cdots \\ \cdots & \frac{1}{4}\cdot 5 & \cdots & \frac{1}{4}\cdot 4 & \cdots \end{bmatrix}$$

determináns kiszámítása.

példa:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 - 3\cdot 4 = -2$$

ugyanez pivotálással:

$$\begin{array}{c|cc} & a_1 & a_2 \\ \hline e_1 & 2 & 3 \\ e_2 & \boxed{4} & 5 \end{array} \xrightarrow{e_2 \leftarrow a_1} \begin{array}{c|cc} & a_1 & a_2 \\ \hline e_1 & 0 & \boxed{1/2} \\ a_1 & 1 & 5/4 \end{array} \xrightarrow{e_1 \leftarrow a_2} \begin{array}{c|cc} & a_1 & a_2 \\ \hline a_2 & 0 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \boxed{4}\cdot\boxed{1/2}\cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{-1} = -2$$

Magyarázat: Mi történik a pivottábla soraival?

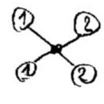
$$\begin{matrix}\boxed{2\ \ 3} \\ \boxed{4\ \ 5}\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}\boxed{2\ \ 3} - \frac{2}{4}\cdot\boxed{4\ \ 5} \\ \frac{1}{4}\cdot\boxed{4\ \ 5}\end{matrix} = \begin{matrix}\boxed{0\ \ 1/2} \\ \boxed{1\ \ 5/4}\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}\frac{1}{1/2}\cdot\boxed{0\ \ 1/2} \\ \boxed{1\ \ 5/4} - \frac{5}{2}\cdot\boxed{0\ \ 1/2}\end{matrix} = \begin{matrix}\boxed{0\ \ 1} \\ \boxed{1\ \ 0}\end{matrix}$$

① egy sor megszorzása α-val α-szorosára növeli a determinánst

② egy sor számszorosa hozzáadása egy másik sorhoz változatlanul hagyja a determinánst

Tehát

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\boxed{4}}\cdot\frac{1}{\boxed{1/2}} = \underbrace{\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} = -1$$



páratlan permutáció

$\leftarrow \pi(1)=2,\ \pi(2)=1$ permutáció (nem mátrix)

Vagyis

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \boxed{4}\cdot\boxed{1/2}\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot(-1) = -2$$

Összegezve: Determináns kiszámítása $=$

① a mátrix pivottábláját egy permutáció mátrix alakjára hozzuk.

② a pivotelemek szorzata megszorozva a permutáció előjelével megadja a determinánst.

Sajátérték, sajátvektor

Probléma: Adott A, $\vec{x}$, mennyi $A^n\vec{x}$? (A $k\times k$ dimenziós négyzetes mátrix)

Megoldási stratégia (2 dim):

① Oldd meg az $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$ egyenletet!
Legyen két lineárisan független megoldás $\vec{v}_1$ és $\vec{v}_2$,
vagyis $A\vec{v}_1=\lambda_1\vec{v}_1$, $A\vec{v}_2=\lambda_2\vec{v}_2$.

② Írd fel az $\vec{x}$ vektort $\vec{v}_1$ és $\vec{v}_2$ lineáris kombinációjaként:

$$\vec{x}=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2$$

③ Ekkor

$$A^n\vec{x}=A^n(\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2)=\alpha_1A^n\vec{v}_1+\alpha_2A^n\vec{v}_2=\alpha_1\cdot\lambda_1^n\vec{v}_1+\alpha_2\cdot\lambda_2^n\vec{v}_2,$$

hiszen pl. $A^2\vec{v}_1=A\cdot A\vec{v}_1=A\cdot\lambda_1\vec{v}_1=\lambda_1A\vec{v}_1=\lambda_1\cdot\lambda_1\vec{v}_1=\lambda_1^2\vec{v}_1$

Hogyan oldjuk meg az $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$ nemlineáris sajátérték egyenletet?

$$A\vec{v}=\lambda\vec{v}\qquad\vec{v}\neq\vec{0}$$

$$A\vec{v}=\lambda E\vec{v}$$

$$\left.\begin{aligned}(A-\lambda E)\vec{v}&=\vec{0}\\(A-\lambda E)\vec{0}&=\vec{0}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}A-\lambda E&:\vec{v}\longrightarrow\vec{0}\\A-\lambda E&:\vec{0}\longrightarrow\vec{0}\end{aligned}$$

tehát az $A-\lambda E$ lin. leképezés nem bijektív, nem invertálható, vagyis

$$\det(A-\lambda E)=0.$$

Tehát az $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$, $\vec{v}\neq\vec{0}$ megoldása:

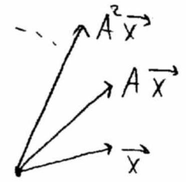
① Oldd meg az $\det(A-\lambda E)=0$ egyenletet.

② Az egyenlet mindegyik λ_i gyökére oldd meg a $A\vec{v}_i=\lambda_i\vec{v}_i$ egyenletet, ami már csak egy lineáris egyenlet a $\vec{v}_i$ sajátvektorra.

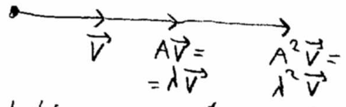
HA sikerül a vektorterünkben egy sajátvektorokból álló bázist találnunk, akkor megoldottuk az $A^n\vec{x}$ kiszámításának a problémáját.

(Sajnos elképzelhető, hogy ilyen bázis nem létezik, ennek az esetnek a kezelése kissé bonyolultabb.
Továbbá ha A valós mátrix, akkor is lehetnek a $\det(A-\lambda E)=0$ egyenlet gyökei komplex számok, így a bázisunk sokszor komplex vektorokból fog állni.)

Geometriai interpretáció

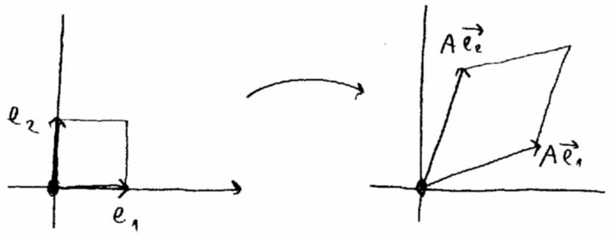


A^n hatása bonyolult egy tetszőleges $\vec{x}$ vektoron.

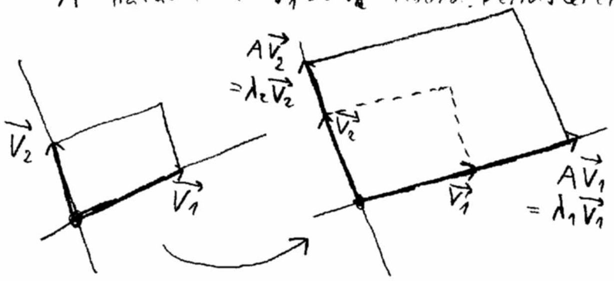


A^n hatása egyszerű egy $\vec{v}$ sajátvektoron

A hatása az $\vec{e}_1 \ldots \vec{e}_k$ koord. rendszeren:



A hatása a $\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_k$ koord. rendszeren



A^n kiszámítása $\left(\text{2dim illusztráció, } A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix},\ \lambda_1 = 7, \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \lambda_2 = 3,\ \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$

① $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}_v \leftarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_e$ koordinátarendszer váltás: $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}_v = S^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_e$

② A hatása az $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}_v$ koordinátákon: $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}_v = \begin{bmatrix} \lambda_1\alpha_1 \\ \lambda_2\alpha_2 \end{bmatrix}_v \xleftarrow{A} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}_v$

③ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_e \leftarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}_v$ koordinátarendszerváltás: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_e = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \\ | & | \end{bmatrix}_{e \leftarrow v}}_{S} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}_v = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2$

Összegezve mindezt:

$$A^n \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_e = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \\ | & | \end{bmatrix}_{e \leftarrow v}}_{③:\ S} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}_{v \leftarrow v}}_{②:\ D^n} \underbrace{\begin{bmatrix} S^{-1} \end{bmatrix}_{v \leftarrow e} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_e}_{①:\ S^{-1}\vec{x} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}_v}$$

esetünkben $S = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}} \end{bmatrix}$, $S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^n_{e \leftarrow e} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_e = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}_{e \leftarrow v} \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^n_{v \leftarrow v}}_{= \begin{bmatrix} 7^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}_{v \leftarrow e} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_e$$

Vagyis

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad A^n = S D^n S^{-1},$$

ahol D a sajátértékekből álló diagonális mátrix, S pedig a sajátvektorokat tartalmazza.

Sajátérték, sajátvektor példák.

Probléma: keresd meg a sajátértékeket, majd keress egy sajátvektorokból álló bázist (ha van ilyen).

(1) Diagonális mátrix $\longleftrightarrow$ triviális feladat

$$A=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix},\quad \det(A-\lambda E)=\det\left(\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)=\begin{vmatrix}2-\lambda&0\\0&3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(3-\lambda)-0^2$$

tehát $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$.

sajátvektorok: $(A-\lambda E)\vec{v}=\vec{0}$, $\vec{v}\neq\vec{0}$

$\lambda_1=2$

$$\begin{bmatrix}2-2&0\\0&3-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\longrightarrow 0x+1y=0,\longrightarrow y=0 \quad \text{sajátvektorok: } \begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}, x\in\mathbb{R}$$

$\lambda_2=3$

$$\begin{bmatrix}2-3&0\\0&3-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\longrightarrow -x+0y=0\longrightarrow x=0 \quad \text{sajátvektorok: } \begin{bmatrix}0\\y\end{bmatrix}, y\in\mathbb{R}$$

Most válasszunk az $\left\{\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}\middle| x\in\mathbb{R}\right\}$, $\left\{\begin{bmatrix}0\\y\end{bmatrix}\middle| y\in\mathbb{R}\right\}$ alterekből két nem nulla vektort:

$$\lambda_1=2,\ \vec{v_1}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad \lambda_2=3,\ \vec{v_2}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

Tehát egy diagonális mátrix esetén a standard bázis elemei sajátvektorok, a megfelelő diagonális elemmel mint sajátértékkel.

(2) $A=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$, $\lambda_1=2$, $\vec{v_1}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\lambda_2=2$, $\vec{v_2}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$.

Itt csak egy sajátértéket ad az $\begin{vmatrix}2-\lambda&0\\0&2-\lambda\end{vmatrix}=0$ egyenlet, de mivel A diagonális, így van sajátvektorokból álló bázis.

(3) $A=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}$, $\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\0&2-\lambda\end{vmatrix}=0=(2-\lambda)^2\longrightarrow\lambda=2$.

$$(A-2\cdot E)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=0\longrightarrow y=0,\quad \text{sajátvektorok: } \left\{\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}\middle| x\in\mathbb{R}\right\}$$

<u>nincs</u> sajátvektorokból álló bázis!

Ennek ellenére A^n kiszámítható:

$$\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}^n=\left(\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right)^n=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}^n+\underbrace{\binom{n}{1}}_{=n}\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}^{n-1}\cdot\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+\binom{n}{2}\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}^{n-2}\cdot\overbrace{\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}^2}^{=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}}+\dots$$

$$=\begin{bmatrix}2^n&0\\0&2^n\end{bmatrix}+n\cdot2^{n-1}\cdot\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^n&n\cdot2^{n-1}\\0&2^n\end{bmatrix}$$

binomiális együttható: $\binom{n}{2}=\frac{n!}{(n-2)!\,2!}=\frac{n(n-1)}{2}$

Itt a következőket használtuk fel:

(1) $\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$, vagyis a két mátrix kommutál

(2) $(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\dots$, ha $ab=ba$ (binomiális tétel)

(3) $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

3. Folyt. Megjegyzés:

Jordan-normálforma. Tétel: Legyen A egy $n\times n$-es komplex mátrix. Ekkor létezik olyan invertálható S, hogy $S^{-1}AS=D$, ahol D egy blokk-diagonális, mátrix, amelynek a diagonális blokkjai alakja a következő alakúak lehetnek:

$$[\lambda],\ \begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix},\ \dots \text{stb.}\qquad \text{(Jordan blokkok)}$$

például egy 2 dimenziós és 2 egydimenziós blokkot tartalmazó D lehetne pl.

$$D=\begin{bmatrix}\boxed{3} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \boxed{4} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 5\end{bmatrix}.$$

Ha ismerjük S-t, akkor $A^n=(SDS^{-1})^n=SDS^{-1}\cdot SDS^{-1}\cdot\ldots\cdot SDS^{-1}=SD^nS^{-1}$,

viszont D^n kiszámítható, pl.

$$\begin{bmatrix}5&1&0\\0&5&1\\0&0&5\end{bmatrix}^n=\Bigg(5\cdot E+\underbrace{\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}}_{J}\Bigg)^n=5^n\cdot E+\binom{n}{1}5^{n-1}\cdot E\cdot J+\binom{n}{2}\cdot 5^{n-2}\cdot E\cdot J^2+\binom{n}{3}\cdot 5^{n-3}\cdot E\cdot J^3+\ldots$$

ahol $J^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, $J^3=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, így

$$\begin{bmatrix}5&1&0\\0&5&1\\0&0&5\end{bmatrix}^n=5^n\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+n\cdot 5^{n-1}\cdot\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}+\overbrace{\binom{n}{2}}^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot 5^{n-2}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Megjegyzés: ugyanolyan típusú blokk-diagonális mátrixokkal könnyebb számolni, pl.

$$\begin{bmatrix}\boxed{3}&0&0&0\\0&\boxed{4}&0&0\\0&0&5&1\\0&0&0&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\boxed{1}&0&0&0\\0&\boxed{2}&0&0\\0&0&3&5\\0&0&6&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boxed{3}&0&0&0\\0&\boxed{8}&0&0\\0&0&21&9\\0&0&30&20\end{bmatrix}$$

$[3]\cdot[1]=[3]$

$[4]\cdot[2]=[8]$

$$\begin{bmatrix}5&1\\0&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3&5\\6&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}21&9\\30&20\end{bmatrix}$$

(4) $A=\begin{bmatrix}2&1\\0&3\end{bmatrix}$. $\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\0&3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(3-\lambda)-1\cdot 0\longrightarrow \lambda_1=2,\ \lambda_2=3$

sajátvektorok:

$\lambda_1=2\quad (A-2\cdot E)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-2&1\\0&3-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\longrightarrow y=0$

$\lambda_2=3\quad (A-3\cdot E)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-3&1\\0&3-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\longrightarrow -1\cdot x+1\cdot y=0 \longrightarrow x=y$

Megjegyzés: Az ugyanahhoz a saját értékhez tartozó sajátvektorok alteret alkotnak (a $\vec{0}$ hozzávétele után), mivel

$$\left.\begin{aligned}A\vec{v}_1&=\lambda\vec{v}_1\\A\vec{v}_2&=\lambda\vec{v}_2\end{aligned}\right\}\Longrightarrow \begin{aligned}A(\vec{v}_1+\vec{v}_2)&=A\vec{v}_1+A\vec{v}_2=\lambda\vec{v}_1+\vec{v}_2=\lambda(\vec{v}_1+\vec{v}_2)\\A(c\cdot\vec{v}_1)&=c\cdot A\vec{v}_1=c\cdot\lambda\vec{v}_1=\lambda(c\cdot\vec{v}_1)\end{aligned}$$

A sajátalterei:

$\lambda_1=2,\ \left\{\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}\middle|\, x\in\mathbb{R}\right\}\qquad \lambda_2=3,\ \left\{\begin{bmatrix}x\\x\end{bmatrix}\middle|\, x\in\mathbb{R}\right\}$

Sajátvektorokból álló bázis:

$\lambda_1=2,\ \vec{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\qquad \lambda_2=3,\ \vec{v}_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

(5) $A=\begin{bmatrix}3&1\\1&3\end{bmatrix}$, $\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}3-\lambda&1\\1&3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(3-\lambda)-1\cdot 1=\lambda^2-6\lambda+8=0$
$\longrightarrow \lambda_1=4,\ \lambda_2=2$

$\lambda_1=4\quad (A-4E)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\longrightarrow x=y$

$\lambda_2=2\quad (A-2E)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\longrightarrow x=-y$

A sajátalterei:

$\lambda_1=4,\ \left\{\begin{bmatrix}x\\x\end{bmatrix}\middle|\, x\in\mathbb{R}\right\}\qquad \lambda_2=2,\ \left\{\begin{bmatrix}x\\-x\end{bmatrix}\middle|\, x\in\mathbb{R}\right\}$

bázis: $\lambda_1=4,\ \vec{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\qquad \lambda_2=2,\ \vec{v}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

Megjegyzés: Tétel: Ha A egy szimmetrikus valós mátrix, akkor létezik a sajátvektoraiból álló ortonormált bázis.

(esetünkben pl. lehetne

$\lambda_1=4,\ \vec{v}_1=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix},\quad \lambda_2=2,\ \vec{v}_2=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}.\,.)$

6 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2+1 = \lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$

$\longrightarrow \lambda_1 = 3+i, \quad \lambda_2 = 3-i$

Tehát a sajátvektorokat $\mathbb{R}^2$ helyett $\mathbb{C}^2$-ben kell megkeresnünk.

$\lambda_1 = 3+i \qquad (A-(3+i)E)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow -ix+y=0 \longrightarrow y = +ix$

$\lambda_2 = 3-i \qquad (A-(3-i)E)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow ix+1y=0 \longrightarrow y = -ix$

A sajátalterei:

$\lambda_1 = 3+i, \quad \left\{ \begin{bmatrix} x \\ ix \end{bmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{C} \right\} \qquad \lambda_2 = 3-i, \quad \left\{ \begin{bmatrix} x \\ -ix \end{bmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{C} \right\}$

bázis:

$\lambda_1 = 3+i, \quad \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = 3-i, \quad \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

7 Fibonacci sorozat

$F_0 = F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad (A-\lambda_1 E)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow x + \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)y = 0 \longrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, y$

$\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad (A-\lambda_2 E)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow x + \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)y = 0 \longrightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\, y$

bázis: $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \vec{v_1} = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad \vec{v_2} = \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

Ekkor $\begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} \frac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \end{array}$

tehát $\begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{1}{10}(5+\sqrt{5}) \\ \alpha_2 = \frac{1}{10}(5-\sqrt{5}) \end{array}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}(5+\sqrt{5})\,\vec{v_1} + \frac{1}{10}(5-\sqrt{5})\,\vec{v_2}$

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}(5+\sqrt{5})\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \vec{v_1} + \frac{1}{10}(5-\sqrt{5})\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \vec{v_2}$$

vagyis

$$F_n = \frac{1}{10}\left((5+\sqrt{5})\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + (5-\sqrt{5})\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)$$

7. Folyt. Megjegyzés: Fibonacci eredeti megoldása:

1. Keresd meg $f_{n+1}=f_n+f_{n-1}$ mértani sor $f_n=q^n$ nemnulla megoldásait

$$q\neq 0, \quad q^{n+1}=q^n+q^{n-1} \Longrightarrow q^2=q+1 \Rightarrow q_1=\frac{1+\sqrt5}{2} \quad q_2=\frac{1-\sqrt5}{2}$$

2. Keress α_1, α_2 számokat, hogy az $F_n=\alpha_1 q_1^n+\alpha_2 q_2^n$ sorozat kielégítse az $F_0=1$, $F_1=1$ kezdeti feltételeket is!

$$\begin{array}{ll} F_0=1 \iff & \alpha_1+\alpha_2=1 \\ F_1=1 & \alpha_1\frac{1+\sqrt5}{2}+\alpha_2\frac{1-\sqrt5}{2}=1 \end{array} \iff \begin{array}{l} \alpha_1=\frac{1}{10}(5+\sqrt5) \\ \alpha_2=\frac{1}{10}(5-\sqrt5) \end{array}$$

8. Legyen $A=\begin{bmatrix}0.8 & 0.3\\ 0.2 & 0.7\end{bmatrix}$. Ennek elemei nemnegatívak, és minden oszlop elemeinek az összege 1. Tehát ez egy stochasztikus mátrix, amelyik leírja az $\overset{0.8}{\circlearrowleft}(1) \underset{0.3}{\overset{0.2}{\rightleftarrows}} (2)\overset{0.7}{\circlearrowright}$ kétállapotú rendszerben az (1) és (2) állapotok p_1 és p_2 valószínűségeinek az időbeli fejlődését: $\begin{bmatrix}p_1\\ p_2\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{egységnyi idő}} A\cdot\begin{bmatrix}p_1\\ p_2\end{bmatrix}$.

Keresd meg A sajátértékeit és sajátvektorait!

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}0.8-\lambda & 0.3\\ 0.2 & 0.7-\lambda\end{vmatrix}=0=\lambda^2-1.5\lambda+0.5 \longrightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=1/2$$

$$\lambda_1=1:\quad (A-1\cdot E)\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.2 & 0.3\\ 0.2 & -0.3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}, \qquad -0.2x+0.3y=0\longrightarrow x=1.5y$$

$$\lambda_2=\tfrac12:\quad (A-\tfrac12 E)\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.3 & 0.3\\ 0.2 & 0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}, \qquad 0.3x+0.3y=0\longrightarrow x=-y$$

bázis: $\lambda_1=1,\ \vec{v}_1=\begin{bmatrix}3/5\\ 2/5\end{bmatrix}$, $\quad \lambda_2=\frac12,\ \vec{v}_1=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$

Megjegyzés:

1. Stochasztikus mátrixok esetén $\lambda_1=1$ mindig sajátérték, a hozzá tartozó sajátvektor leírja az egyensúlyi, időben állandó valószínűség eloszlást.

2. Mivel csak két állapot van az esetünkben, így a rendszer az egyensúlyi állapotában automatikusan teljesül a részletes egyensúly elve:
az (1) $\longrightarrow$ (2) folyamat esélye ugyanannyi, mint a (1) $\longleftarrow$ (2) fordított folyamaté:

$$W_{2\leftarrow1}\,P_1=W_{1\leftarrow2}\,P_2$$

$$0.2\cdot\frac35=0.3\cdot\frac25$$