Komplex számok.

Definíció 1. $(\mathbb{C}, +, *, ^{-1}) = (\mathbb{R}^2, +, *, ^{-1})$

$(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$ $\qquad a,b,c,d \in \mathbb{R}$

$(a,b)*(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$

$(a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) \longleftarrow$ egyedül $(0,0)$ nem invertálható $\Rightarrow \mathbb{C}$ egy test

Ekkor $(1,0)*(a,b)=(a,b)$, $(0,0)+(a,b)=(a,b)$, $(a,b)*(a,b)^{-1} = (1,0)$

Definíció 2. $\mathbb{R}[x]$ az egyváltozó való polinomok algebrája a $+, *$ műveletekkel.

$\sim$ ekvivalenciareláció: $f(x) \sim g(x)$, ha $f(x)-g(x) = h(x)\cdot(x^2+1)$ valamely $h(x)$ polinomra.

$\mathbb{C}$-t $\mathbb{R}[x]$ ekvivalenciaosztályai alkotják.

Ez a definíció azt jelenti, hogy $\mathbb{C}$-t az $a+bi$ alakú számok (itt $a,b\in\mathbb{R}$) alkotják, ahol az i szimbólummal úgy számolunk, mint az x változóval, kivéve, hogy $i^2+1=0 \longrightarrow i^2=-1$, vagyis formálisan $i=\sqrt{-1}$.

Definíció 3.

Legyen $I = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $I^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -E$, és vegyük a $K(a,b) = aE + bI$, $a,b\in\mathbb{R}$ alakú mátrixok kétdimenziós vektorterét. Ez egy részalgebrája a 2×2 mátrixok $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ algebrájának, hiszen

$$K(a,b)+K(c,d) = (aE+bI)+(cE+dI) = (a+c)E+(b+d)I = K(a+c, b+d),$$

$$K(a,b)K(c,d) = (aE+bI)(cE+dI) = (acE^2+bdI^2)+(adEI+bcIE)$$

$$= (ac-bd)E+(ad+bc)I = K(ac-bd, ad+bc)$$

Itt $K(1,0)$ az egységelem: $K(1,0)K(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = K(a,b)$

$K(0,0)$ a nulla: $K(0,0)+K(a,b) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = K(a,b)$

Továbbá $K(0,0)$-on kívül bármely elem invertálható:

$$K(a,b)^{-1} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a\cdot a-(-b)\cdot b}\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = K\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

$\mathbb{C}$ azonosítható (izomorf) a $\{K(a,b) \mid a,b\in\mathbb{R}\}$ mátrixok algebrájával.

Megjegyzés: ezek közül talán Def. 2. a leghasznosabb, ez fejezi ki azt az elvet, hogy

"i-vel úgy számolunk, mint egy x változóval, kivéve, hogy $i^2=-1$."

Trigonometrikus alak.

$$k(a,b)=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \sqrt{a^2+b^2}\ \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{bmatrix}}_{\substack{\text{ortogonális mátrix,} \\ \text{determináns}=1}} = \overbrace{r}^{a+bi \text{ abszolútértéke}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}}_{\text{2dim elforgatás}} = r\cdot R_\alpha ,$$

ahol $r=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\alpha=\frac{a}{r}$, $\sin\alpha=\frac{b}{r}$, $\alpha=\overbrace{\operatorname{arctg}}^{\text{árkusztangens, a "tg" függvény "inverze"}}\left(\frac{b}{a}\right)$ moduló π.

Szorzás:

$$a+bi = r(\cos\alpha+i\sin\alpha) \longleftrightarrow k(a,b)=r\cdot R_\alpha$$
$$c+di = s(\cos\beta+i\cdot\sin\beta) \longleftrightarrow k(c,d)=s\cdot R_\beta$$

$$k(a,b)k(c,d)=r\cdot R_\alpha\cdot s\cdot R_\beta =$$
$$=(rs)\,R_\alpha R_\beta=(rs)\,R_{\alpha+\beta}$$

tehát

$$(a+bi)(c+di)=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)\cdot s(\cos\beta+i\cdot\sin\beta)$$
$$=(rs)(\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta))$$

Hatványozás, gyökvonás trigonometrikus alakban:

$$[r(\cos\alpha+i\sin\alpha)]^n=r^n(\cos(n\alpha)+i\cdot\sin(n\alpha))$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha+i\sin\alpha)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\left[\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right]+i\cdot\sin\left[\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right]\right),\quad k=0,1\ldots n-1$$

valós gyökvonás nemnegatív számból

akármilyen egész szám, de pl. 0 és n ugyanazt a gyököt generálja:
$\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\cdot 0\pi}{n}\right)=\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\cdot n\pi}{n}\right)-2\pi$

Valóban:

$$\left[\sqrt[n]{r}\left(\cos\left[\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right]+i\cdot\sin\left[\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right]\right)\right]^n=$$

$$=\left(\sqrt[n]{r}\right)^n\left(\cos[\alpha+2k\pi]+i\cdot\sin[\alpha+2k\pi]\right)=r(\cos\alpha+i\cdot\sin\alpha)$$

Megjegyzés: A $a+bi\longleftrightarrow\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a\end{bmatrix}$ megfeleltetés elég természetes, mivel ha azonosítjuk az $x+iy$ komplex számot az $\begin{bmatrix} x \\ y\end{bmatrix}$ valós $\mathbb{R}^2$-beli vektorral, akkor

$$(a+bi)(x+iy)=((ax-by)+(ay+bx)\cdot i)\longleftrightarrow\begin{bmatrix} ax-by \\ ay+bx\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y\end{bmatrix}$$

Megjegyzés: Az $aE+bI$, $I^2=-E$ alakú mátrixok helyett vehettük volna pl. ezeket:

① $a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}^2=E$, ② $a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix}=0\cdot E$, de az így kapott részalgebrákban nem csak az $a=b=0$ számokhoz hozzárendelt elem lenne neminvertálható:

① $\begin{matrix} a=1 \\ b=1\end{matrix}\longrightarrow 1\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}+1\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}$ nem létezik.

② $\begin{matrix} a=0 \\ b=1\end{matrix}\longrightarrow 0\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}+1\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$

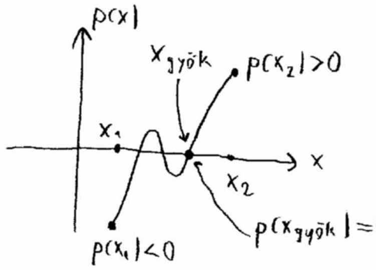
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix}^{-1}$ nem létezik.

Algebra alaptétele (Gauss)

Minden $p(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1z+a_0$ komplex együtthatós polinomnak létezik komplex gyöke.

Valós eset: Minden $p(x)=z^{2n+1}+a_{2n}z^{2n}+\dots+a_1z+a_0$ páratlan fokú valós polinomnak létezik valós gyöke.

Bizonyítás (vázlat): $\lim_{x\to-\infty}p(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}p(x)=\infty$, így léteznek x_1, x_2 számok, hogy $p(x_1)<0$, $p(x_2)>0$. Továbbá $p(x)$ folytonos, így valamely $x_{gyök}\in(x_1,x_2)$ pontban p értéke nulla; $p(x_{gyök})=0$.



(Azt az eredményt, hogy

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\text{ folytonos},\\ f(x_1)<0\\ f(x_2)>0, \quad x_1<x_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l}\text{létezik } x_1<x_{gyök}<x_2,\\ f(x_{gyök})=0,\end{array}$$

Bolzanó tételének hívják)

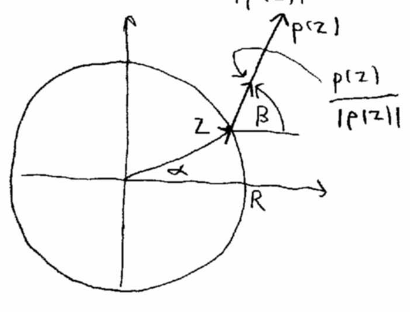
Komplex eset: Minden komplex polinomnak van komplex gyöke.

Bizonyítás (vázlat):

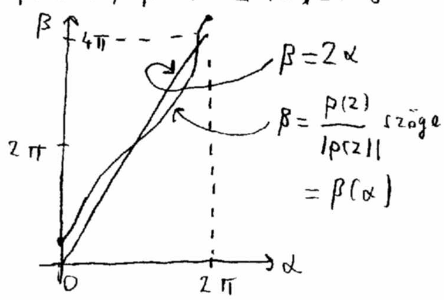
① Ha $|z|$ elég nagy, akkor $|z^n| >> |a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_0|$, tehát $p(z)\approx z^n$.

Legyen $z=R(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, ekkor $p(z)\approx z^n=R^n(\cos[n\alpha]+i\sin[n\alpha])$,

$$\frac{p(z)}{|p(z)|}=\cos(\beta)+i\sin(\beta)\approx\cos[n\alpha]+i\sin[n\alpha], \text{ tehát } \beta\approx n\alpha$$



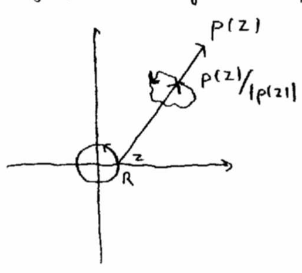
pl. $n=2$, $p(z)=z^2+a_1z+a_0$

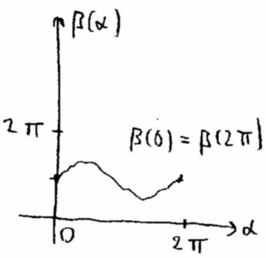


Indirekt bizonyítás: Feltesszük, hogy a tétel nem igaz, és ebből ellentmondást kapunk, tehát a tétel IGAZ. Tehát tegyük fel, hogy létezik $p(z)$, úgy hogy $p(z)\neq 0$ bármely $z\in\mathbb{C}$-re.

Ha ennek (a nem létező) $p(z)$ polinomnak a fokszáma n, akkor, ha R elég nagy, akkor $\beta(2\pi)-\beta(0)=n.2\pi$. Most csökkentsük R-t, ekkor $\beta(\alpha)$ gráfja "folytonosan" fog változni, viszont ez azt jelenti, hogy $\beta(2\pi)-\beta(0)$ végig $n.2\pi$ marad, hiszen $\beta(2\pi)-\beta(0)$ többszöröse 2π-nek, a "folytonosság" viszont megtiltja, hogy $\beta(2\pi)-\beta(0)$ ugrásszerűen változzon.

(Ha $p(z)$-nek van gyöke, akkor $p(z)/|p(z)|$ a gyöknél nincs értelmezve, a megfelelő R értéknél ugorhat $\beta(2\pi)-\beta(0)$.) Legyen most $R\approx 0$, az ábráink:





Itt $\beta(2\pi)-\beta(0)=0$, <u>ellentmondva</u> annak, hogy:

① $\beta(2\pi)-\beta(0)=n.2\pi$, ha R elég nagy.

② $\beta(2\pi)-\beta(0)$ mindig 2π valahányszorosa,

③ $\beta(2\pi)-\beta(0)$ R folytonos függvénye.

Ellentmondást kaptunk $\Longrightarrow$ a tétel IGAZ.