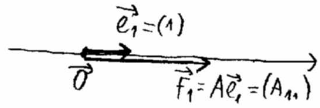
Determináns

Legyen A egy $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezés mátrixa, $A\vec{e}_i = \vec{f}_i$. Mekkora az $\vec{f}_i$ vektorok által kifeszített (1dim: szakasz, 2dim: paralelogramma, 3dim: ferde téglatest (paralelepipedon), ... ndim: ferde hiperkocka) előjeles (1dim: hossza, 2dim: területe, 3dim: térfogata .. ndim: térfogata)? Jelöljük ezt $\det A = |A| = \det(\vec{f}_1, \ldots \vec{f}_n)$ -vel.

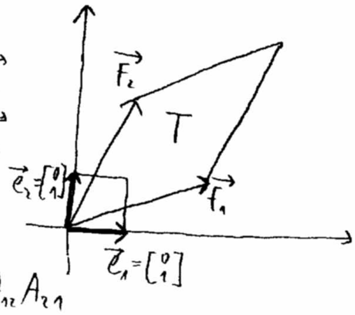
1 dim: $A = (A_{11})$, $\vec{e}_1 = (1) \longrightarrow A\vec{e}_1 = (A_{11})(1) = (A_{11})$



$$\det(A) = |A_{11}| = \det(\vec{f}_1) = A_{11}$$

2 dim: $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, $\quad \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow A\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} = \vec{f}_1$

$\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow A\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} = \vec{f}_2$



$$T = \det(A) = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \det(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$$

3dim: $A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$, $\quad A\vec{e}_i = \vec{f}_i$

vegyesszorzat

$$\det(A) = |A| = (\vec{f}_1 \times \vec{f}_2) \cdot \vec{f}_3 = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3) = \det(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$$

A $\det: \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ leképezés tulajdonságai:

$$\det(E) = \det(\vec{e}_1, \vec{e}_2 \ldots \vec{e}_n) = 1 \qquad \text{normalizálás}$$

$$\det(\ldots \vec{f}_{i-1}, \alpha\vec{f}_i + \beta\vec{g}_i, \vec{f}_{i+1} \ldots) = \alpha \det(\ldots \vec{f}_{i-1}, \vec{f}_i, \vec{f}_{i+1} \ldots) + \beta \det(\ldots \vec{f}_{i-1}, \vec{g}_i, \vec{f}_{i+1} \ldots)$$

(multi)linearitás

$$\det(\ldots \vec{f}_{i-1}, \vec{f}_i, \vec{f}_{i+1}, \vec{f}_{i+2} \ldots) = -\det(\ldots \vec{f}_{i-1}, \vec{f}_{i+1}, \vec{f}_i, \vec{f}_{i+2})$$

csere $\qquad$ antiszimmetria

Ezek alapján det kiszámolható. 2dim. illusztráció:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \det(2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2, 4\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2) =$$

multilinearitás

$$= 2 \cdot 4 \det(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + 2 \cdot 5 \det(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + 3 \cdot 4 \det(\vec{e}_2, \vec{e}_1) + 3 \cdot 5 \det(\vec{e}_2, \vec{e}_2)$$

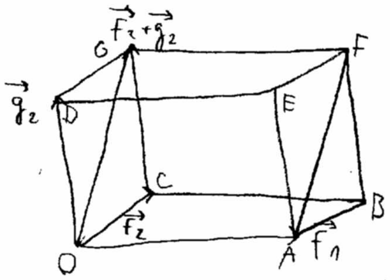
$\det(\vec{e}_i, \vec{e}_i) = -\det(\vec{e}_i, \vec{e}_i) \implies \det(\vec{e}_i, \vec{e}_i) = 0$ (antiszimmetria) $i = 1, 2$

$\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1$ (normalizáció), $\det(\vec{e}_2, \vec{e}_1) = -\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = -1$

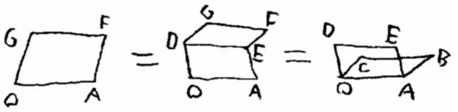
tehát $\det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 0 + 2 \cdot 5 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 \cdot 0 = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4$

Multilinearitás: (2dim)

$$\det(\vec{f}_1, \vec{f}_2 + \vec{g}_2) = \det(\vec{f}_1, \vec{f}_2) + \det(\vec{f}_1, \vec{g}_2)$$



$$\det(\vec{f}_1, \vec{f}_2 + \vec{g}_2) = \text{Terület}(OAFG) =$$
$$= \text{Terület}(OAED) + \text{Terület}(DEFG) =$$
$$= \text{Terület}(OAED) + \text{Terület}(OABC) =$$
$$= \det(\vec{f}_1, \vec{g}_2) + \det(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$$



Permutáció: bijektív függvény. $\{1 \dots n\} \to \{1, \dots n\}$

Mátrixreprezentáció:

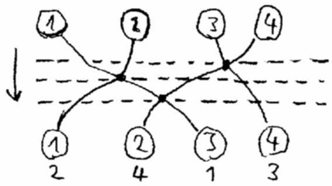
pl. $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\pi(1) = 3$, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 4$, $\pi(4) = 2$.

$$\pi \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right] = S_\pi \qquad S_\pi \vec{e}_1 = \vec{e}_3,\ S_\pi \vec{e}_2 = \vec{e}_1,\ S_\pi \vec{e}_3 = \vec{e}_4,\ S_\pi \vec{e}_4 = \vec{e}_2$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \boxed{3} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \boxed{4} & \cdot \end{pmatrix} \to (S_\pi)_{43} = (S_\pi)_{4 \leftarrow 3} = 1$$

π páros/páratlan: Ha páros/páratlan számú elempár cserével hozható létre

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$



1 2 3 4
1 2 4 3
2 1 4 3
2 4 1 3

3 csere, páratlan permutáció

π páros/páratlan $\Longleftrightarrow$ $S_\pi \vec{e}_1 = \vec{e}_{\pi(1)}$, $S_\pi \vec{e}_2 = \vec{e}_{\pi(2)}, \dots, S_\pi \vec{e}_n = \vec{e}_{\pi(n)}$ pozitív/negatív orientációjú.

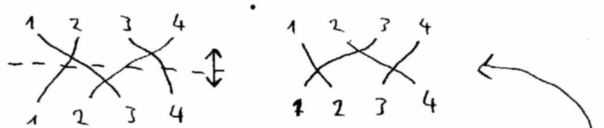
$$\det(A) = \sum_{\pi \in \text{permutációk}} A_{\pi(1),1} \cdot A_{\pi(2),2} \cdot \dots \cdot A_{\pi(n),n} \cdot \mathrm{sgn}(\pi)$$
$$= \sum_{\pi \in \text{perm.}} A_{1,\pi(1)} \cdot A_{2,\pi(2)} \cdot \ldots \cdot A_{n,\pi(n)} \cdot \mathrm{sgn}(\pi)$$

$$\mathrm{sgn}(\pi) = \begin{cases} +1, & \pi \text{ páros} \\ -1, & \pi \text{ páratlan} \end{cases}$$

Itt felhasználtuk az utolsó egyenlőségnél, hogy $\det(A) = \det(A^T)$.

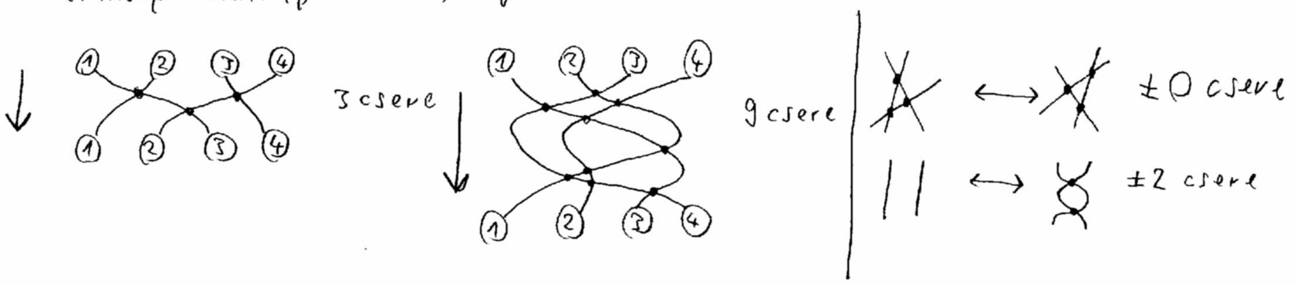
$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathrm{sgn}(\pi) = \mathrm{sgn}(\pi^{-1})$

$$S_\pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{\pi^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_\pi^T$$



tükrözés a vízszintes tengelyre

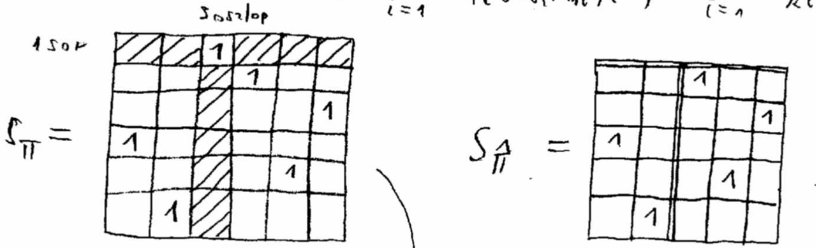
$sgn(\pi)$ független attól, hogy milyen módon állítjuk elő transzpozíciók (párcserék) segítségével π-t:



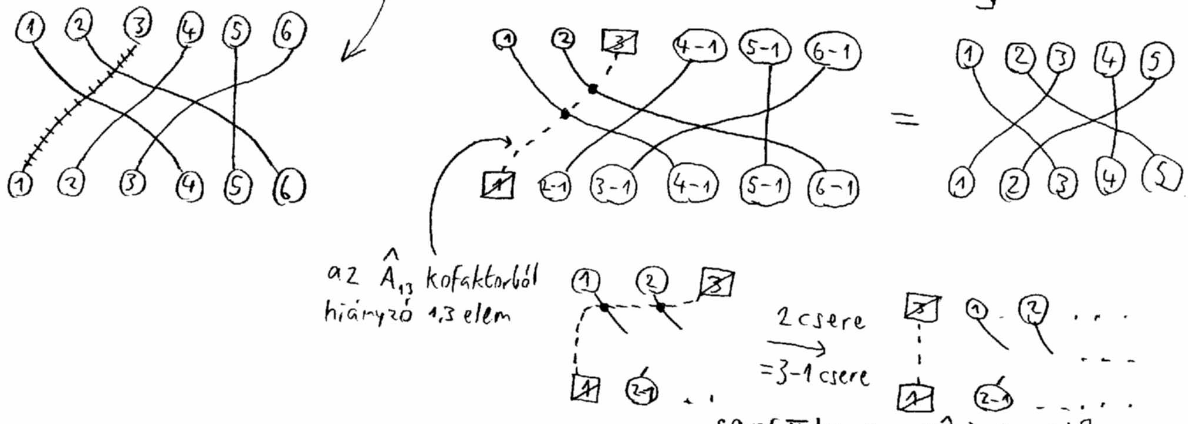
Kofaktor kifejtés:

Legyen $\hat{A}_{ij}$ az a mátrix, amit A-ból az i-edik sor és a j-edik oszlop kitörlésével kapunk. Ekkor

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{1i} \det(\hat{A}_{1i})(-1)^{i+1} = \sum_{i=1}^{n} A_{ki} \det(\hat{A}_{ki})(-1)^{k+i}$$



$$sgn(\pi) = sgn(\hat{\pi}) \cdot (-1)^{3+1} = sgn(\hat{\pi}) \cdot (-1)^{3-1}$$



$$sgn(\pi) = sgn(\hat{\pi}) \cdot (-1)^{+2}$$

Példák:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{3} & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} \\ 3 & \cancel{4} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot |4| + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot |3|$$

$$= 1 \cdot |4| - 2 \cdot |3| = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ \cancel{4} & 5 & 6 \\ \cancel{7} & 8 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 4 & \cancel{5} & 6 \\ 7 & \cancel{8} & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 4 & 5 & \cancel{6} \\ 7 & 8 & \cancel{9} \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7)$$

Determináns tulajdonságai:

① $\det A = \det A^T$, így ha egy tulajdonság teljesül A oszlopaira, akkor ugyanaz igaz a sorokra is.

② $\det(\ldots \vec{f}_i \ldots \vec{f}_j \ldots) = -\det(\ldots \vec{f}_j \ldots \vec{f}_i \ldots)$, $\det(\ldots \vec{f} \ldots \vec{f} \ldots) = 0$

③ $\det(\ldots \vec{f}_i \ldots \vec{f}_j + \alpha \vec{f}_i \ldots) = \det(\ldots \vec{f}_i \ldots \vec{f}_j \ldots)$

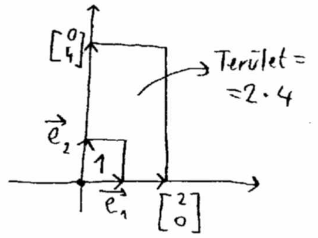
④ $\det(E) = 1$

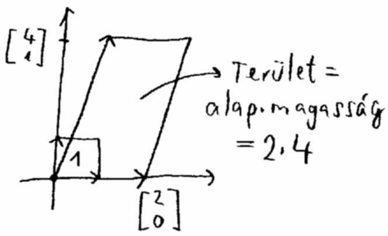
⑤ $\det(A) \cdot \det(B) = \det(AB)$

Könnyen kiszámolható determinánsok:

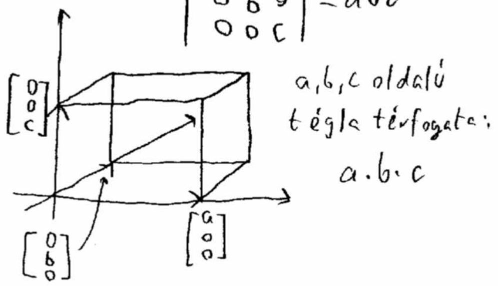
1 dim: $|7| = 7$

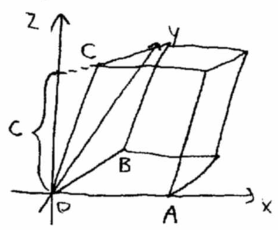
2 dim: $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4$



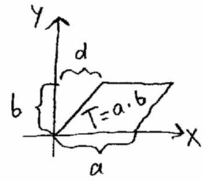


3 dim: $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = a \cdot b \cdot c$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$





Az $A = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} d \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$ pontok az xy síkon egy $a \cdot b$ területű paraleogrammát adnak:



4 dim: $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$

Az $\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d \\ b \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e \\ f \\ c \end{bmatrix}$ vektorok által kifeszített ferde téglatest magassága c, alapterülete pedig $a \cdot b$, így térfogata $a \cdot b \cdot c$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = $$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

Inverz mátrix

$\varphi(\vec{e}_1) = F\vec{e}_1 = \vec{f}_1 \ldots \varphi(\vec{e}_n) = F\vec{e}_n = \vec{f}_n$. $\quad (\vec{e}_1 \ldots \vec{e}_n)$ bázis.

φ invertálható $\iff \vec{f}_1 \ldots \vec{f}_n$ lineárisan független $\iff \det F = \det(\vec{f}_1 \ldots \vec{f}_n) \neq 0$

$$\varphi(\varphi^{-1}(\vec{v})) = \varphi^{-1}(\varphi(\vec{v})) = \vec{v} \iff FF^{-1}\vec{v} = F^{-1}F\vec{v} = \vec{v} \iff FF^{-1} = F^{-1}F = E$$

kiszámítás:

1dim: $\quad (7)\cdot(7)^{-1} = (7)\cdot(x) = (1) \implies 7x = 1, \quad (7)^{-1} = (1/7)$

I 2dim:
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} 1x + 3y = 1 \\ 2x + 5y = 0 \\ \hline x = -5,\ y = 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1u + 3v = 0 \\ 2u + 5v = 0 \\ \hline u = 3,\ v = -1 \end{array} \implies \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

II $\hat{A}_{ij}$: az i-sor és a j-oszlop kitörlése után kapott mátrix

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Klasszikus adjungált:

$$-\begin{vmatrix} \cancel{1} & 3 \\ \cancel{2} & \cancel{5} \end{vmatrix}$$

$$A^{adj} = \begin{pmatrix} |\hat{A}_{11}| & -|\hat{A}_{21}| \\ -|\hat{A}_{12}| & |\hat{A}_{22}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |5| & -|3| \\ -|2| & |1| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A A^{adj} = \det(A)\cdot E$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |5| & -|3| \\ -|2| & |1| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot|5| - 3\cdot|2| & -(1\cdot|3| - 3\cdot|1|) \\ -(2\cdot|5| - 5\cdot|2| & -2\cdot|3| + 5\cdot|1| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{vmatrix} \boxed{{}^{+}1 \quad {}^{-}3} \\ 2 \quad 5 \end{vmatrix}}_{=\det A} & -\underbrace{\begin{vmatrix} \boxed{{}^{+}1 \quad {}^{-}3} \\ 1 \quad 3 \end{vmatrix}}_{=0} \\ \underbrace{\begin{vmatrix} 2 \quad 5 \\ \boxed{{}^{-}2 \quad {}^{+}5} \end{vmatrix}}_{=0} & \underbrace{\begin{vmatrix} 1 \quad 3 \\ \boxed{{}^{-}2 \quad {}^{+}5} \end{vmatrix}}_{=\det A} \end{pmatrix}$$

Tehát $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\cdot A^{adj}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1\cdot 5 - 2\cdot 3}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & +3 \\ +2 & -1 \end{pmatrix}$$

3dim:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&2\end{bmatrix}\qquad A^{adj}=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix}5&6\\8&2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2&3\\8&2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2&3\\5&6\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}4&6\\7&2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&3\\7&2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&3\\4&6\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&2\\7&8\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

$$A\cdot A^{adj}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&2\end{bmatrix}\cdot A^{adj}=\det(A)\cdot E$$

$$=\begin{bmatrix} 1\cdot\begin{vmatrix}5&6\\8&2\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}4&6\\7&2\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix} & -1\cdot\begin{vmatrix}2&3\\8&2\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}1&3\\7&2\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}1&2\\7&8\end{vmatrix} & * \\ 4\cdot\begin{vmatrix}5&6\\8&2\end{vmatrix}-5\cdot\begin{vmatrix}4&6\\7&2\end{vmatrix}+6\cdot\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix} & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&2\end{vmatrix}=\det A\qquad \begin{vmatrix}4&5&6\\4&5&6\\7&8&2\end{vmatrix}=0\qquad -\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&3\\7&8&2\end{vmatrix}=0$$

két azonos sor

tehát $$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^{adj}$$

n dim:

$$\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&\dots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\dots&A_{2n}\\&\vdots&&\\&\vdots&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}|\hat{A}_{11}|&\dots\\-|\hat{A}_{12}|&\dots\\\vdots&\\(-1)^{n+1}|\hat{A}_{1n}|&\dots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overbrace{\boxed{A_{11}|\hat{A}_{11}|-A_{12}|\hat{A}_{12}|+\dots+(-1)^{1+n}A_{1n}|\hat{A}_{1n}|}}^{\det(A)}&\dots\\\underbrace{\boxed{A_{21}|\hat{A}_{11}|-A_{22}|\hat{A}_{12}|+\dots+(-1)^{1+n}A_{2n}|A_{1n}|}}_{0}&\dots\\\vdots&\ddots\end{bmatrix}$$

$$A_{11}|\hat{A}_{11}|-A_{12}|\hat{A}_{12}|+\dots+(-1)^{1+n}A_{1n}|\hat{A}_{1n}|=\begin{vmatrix}A_{11}&A_{12}&\dots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\dots&A_{2n}\\\vdots&&\dots&\end{vmatrix}=\det A$$

$$A_{21}|\hat{A}_{11}|-A_{22}|\hat{A}_{12}|+\dots+(-1)^{1+n}A_{1n}|\hat{A}_{1n}|=\begin{vmatrix}A_{21}&A_{22}&\dots&A_{2n}\\A_{21}&A_{22}&\dots&A_{2n}\\\vdots&&\dots&\end{vmatrix}=0$$

két azonos sor

Multilineáris leképezések: $V \times V \times \ldots \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ (tenzorok)

① lineáris funkcionálok, duális vektortér

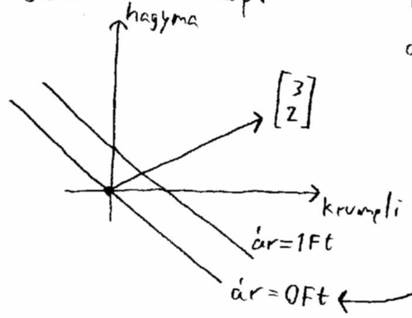
legyen $V = \mathbb{R}^n$. $\ell : V \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, $\ell(\vec{e}_i) = \ell_i$. L betű, E betű

Ekkor $\ell(\vec{v}) = \ell(\sum_i v_i \vec{e}_i) = \sum_i v_i \ell(\vec{e}_i) = \sum_i \ell_i v_i = (\ell_1 \ldots \ell_n)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

a $V = \mathbb{R}^n$ oszlopvektorok duális V^* tere: a $V \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionálok tere.
ez maga is egy vektortér: $(m+n)(\vec{v}) = m(\vec{v}) + n(\vec{v})$, $(\lambda m)(\vec{v}) = \lambda m(\vec{v})$, $m, n \in V^*$.
Ha V Euklédeszi, akkor a skalárszorzat segítségével V^* azonosítható V-vel:

$$\ell(\vec{v}) = (\ell_1 \ldots \ell_n)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right) = (\vec{\ell}, \vec{v})$$

Geometriai kép:



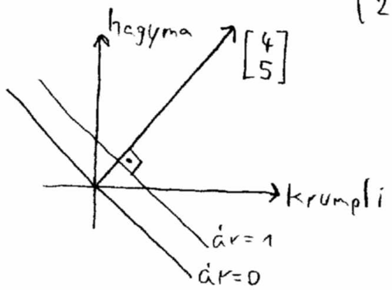
Vegyünk a piacon 3kg krumplit és 2kg hagymát, 4Ft/kg és 5Ft/kg áron. Mennyit fizetünk?

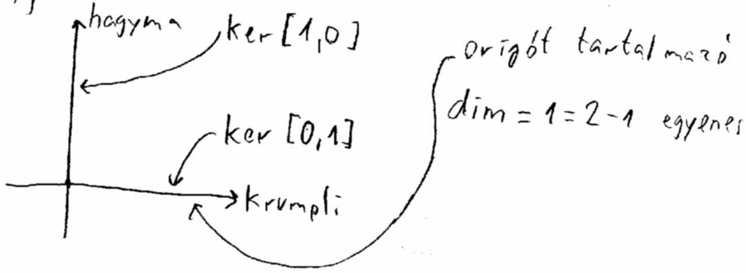
$$\text{ár} = \underbrace{(4\,\text{Ft/kg}, \; 5\,\text{Ft/kg})}_{p} \underbrace{\begin{pmatrix} 3\,\text{kg} \\ 2\,\text{kg} \end{pmatrix}}_{\vec{v}} = (4 \cdot 3 + 5 \cdot 2)\,\text{Ft} = p(\vec{v})$$

$$\ker p = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, p(\vec{v}) = 0 = (p_1\; p_2)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = p_1 v_1 + p_2 v_2 \right\}$$

Ha van skalárszorzat, akkor p azonosítható a $\vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ vektorral:

$$(4, 5)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2$$





3dim: $(n_1, n_2, n_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 = n(\vec{r}) = n_1 x + n_2 y + n_3 z$ ← Origót tartalmazó $2 = 3-1$ dim sík

Ha van skalárszorzat, akkor n azonosítható $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$-mal: $n(\vec{r}) = \left(\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right)$

∞ dim: lehetséges, hogy $V^* \neq V$.

$V = \{(a_1, \ldots a_n, 0, 0 \ldots)\}$, vagyis csak véges sok nem nulla elem van a a_n sorozatban

$V^* = \{(a_1, \ldots a_n, a_{n+1} \ldots)\}$, a_n tetszőleges sorozat.

Megjegyzés: $\ker p = \{\vec{v} \mid p(\vec{v}) = 0\}$ a $p : V \to \mathbb{R}$ leképezés magja (mag: németül kernel)

② mátrix, bilineáris leképezés

Legyen $V=\mathbb{R}^n$ Euklédeszi vektortér, A egy mátrix

$$(\vec{e}_i, A\vec{e}_j) = A_{ij}. \quad \text{pl.} \quad \left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}\right) = 6 = A_{23} = (\vec{e}_2, A\vec{e}_3)$$

$$(\vec{u}, A\vec{v}) = \vec{u}^T A\vec{v} = (A^T\vec{u})^T\vec{v} = (A^T\vec{u}, \vec{v}) = (A^*\vec{u}, \vec{v}),$$

ahol $A^* = A^T$ az A mátrix (valós) adjungáltja.

pl.
$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4&5&6\\7&8&9\\8&7&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}\right) = (1\ 2\ 3)\begin{pmatrix}4&5&6\\7&8&9\\8&7&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix}4&7&8\\5&8&7\\6&9&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}\right)$$

③ (anti)szimmetria

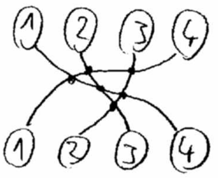
Feladat: Legyen φ egy szimmetrikus bilineáris leképezés.
továbbá legyen $\varphi(\vec{v}_1, \vec{v}_1) = 2$, $\varphi(\vec{v}_2, \vec{v}_2) = 3$, $\varphi(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 4$.
Mennyi $\varphi(5\vec{v}_1 + 6\vec{v}_2, 7\vec{v}_1 + 8\vec{v}_2)$?

$$\varphi(5\vec{v}_1+6\vec{v}_2, 7\vec{v}_1+8\vec{v}_2) = 5\cdot7\,\varphi(\vec{v}_1,\vec{v}_1) + 5\cdot8\,\varphi(\vec{v}_1,\vec{v}_2) + 6\cdot7\,\varphi(\vec{v}_2,\vec{v}_1) + 6\cdot8\,\varphi(\vec{v}_2,\vec{v}_2)$$
$$= 5\cdot7\cdot2 + 5\cdot8\cdot4 + 6\cdot7\cdot4 + 6\cdot8\cdot3$$

mivel $\varphi(\vec{v}_2,\vec{v}_1) = \varphi(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$

Feladat: Legyen φ egy antiszimmetrikus multilineáris leképezés
(vagyis két változója felcserélésekor váltson előjelet),
továbbá legyen $\varphi(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4) = 9$. Mennyi $\varphi(2\vec{v}_1+\vec{v}_4, \vec{v}_3, 3\vec{v}_2+2\vec{v}_1, \vec{v}_1)$?

$$\begin{aligned}\varphi(2\vec{v}_1+\vec{v}_4, \vec{v}_3, 3\vec{v}_2+2\vec{v}_1, \vec{v}_1) &= 2\cdot1\cdot3\cdot1\,\varphi(\vec{v}_1,\vec{v}_3,\vec{v}_2,\vec{v}_1) + \\ &+ 2\cdot1\cdot2\cdot1\,\varphi(\vec{v}_1,\vec{v}_3,\vec{v}_1,\vec{v}_1) + \\ &+ 1\cdot1\cdot3\cdot1\,\underbrace{\varphi(\vec{v}_4,\vec{v}_3,\vec{v}_2,\vec{v}_1)}_{=9\cdot(-1)^6} + \\ &+ 1\cdot1\cdot2\cdot1\,\varphi(\vec{v}_4,\vec{v}_3,\vec{v}_1,\vec{v}_1) = 1\cdot1\cdot3\cdot1\cdot9\cdot(-1)^6 = 27\end{aligned}$$



6 x

az $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$ permutáció páros,
előjele +1

= 0, mivel
$\varphi(\vec{v}_4, \vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_1) = -\varphi(\vec{v}_4, \vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_1)$
csere

Inverz geometriai interpretációja.

$$F = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ \vec{f}_1 & \vec{f}_2 \\ | & | \end{bmatrix}, \quad \vec{f}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{f}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$G = F^{-1} = \begin{bmatrix} 2/5 & -1/5 \\ -1/5 & 3/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\vec{g}_1^T- \\ -\vec{g}_2^T- \end{bmatrix}, \quad \vec{g}_1 = \begin{bmatrix} 2/5 \\ -1/5 \end{bmatrix}, \quad \vec{g}_2 = \begin{bmatrix} -1/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$$

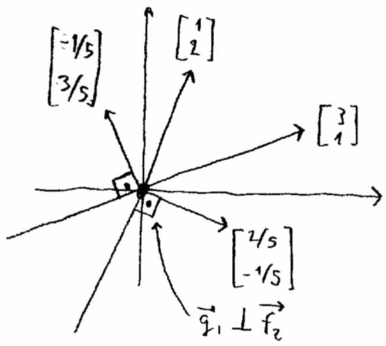
$$GF = \begin{bmatrix} -\vec{g}_1^T- \\ -\vec{g}_2^T- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | \\ \vec{f}_1 & \vec{f}_2 \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ vagyis } \vec{g}_1^T \vec{f}_1 = (\vec{g}_1, \vec{f}_1) = 1, \quad (\vec{g}_1, \vec{f}_2) = 0$$

$$(\vec{g}_2, \vec{f}_1) = 0, \quad (\vec{g}_2, \vec{f}_2) = 1$$

F oszlopai és $G = F^{-1}$ sorai duális bázisokat alkotnak

$$(\vec{g}_i, \vec{f}_j) = \delta_{ij}$$

Ha $\vec{x} = \alpha_1 \vec{f}_1 + \alpha_2 \vec{f}_2$, akkor pl. $\alpha_1 = (\vec{g}_1, \vec{x}) = (\vec{g}_1, \alpha_1 \vec{f}_1 + \alpha_2 \vec{f}_2) = \alpha_1 \underbrace{(\vec{g}_1, \vec{f}_1)}_{1} + \alpha_2 \underbrace{(\vec{g}_1, \vec{f}_2)}_{0}$



$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\vec{g}_1, \vec{x}) \\ (\vec{g}_2, \vec{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\vec{g}_1^T- \\ -\vec{g}_2^T- \end{bmatrix} \vec{x} = F^{-1} \vec{x},$$

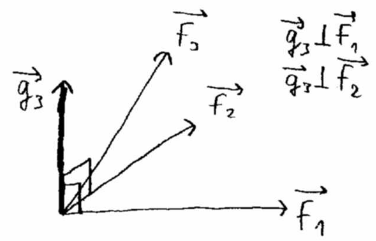
amivel ekvivalens

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{f}_1 + \alpha_2 \vec{f}_2 = \begin{bmatrix} | & | \\ \vec{f}_1 & \vec{f}_2 \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

3dim

$$E = GF = F^{-1} F = \begin{bmatrix} -\vec{g}_1^T- \\ -\vec{g}_2^T- \\ -\vec{g}_3^T- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | \\ \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{g}_3^T \vec{f}_1 = (\vec{g}_3, \vec{f}_1) = 0 = \vec{g}_3^T \vec{f}_2 = (\vec{g}_3, \vec{f}_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{g}_3 \perp \vec{f}_1, \vec{f}_2$$



Megjegyzés. Ha G-nek pl. a harmadik sorát (amit $\vec{g}_3^T$-vel jelöltünk) az oszlopvektorok duális vektorterének az elemének tekintjük, akkor $\vec{g}_3^T \vec{f}_1 = \vec{g}_3^T \vec{f}_2 = 0$ azt jelenti, hogy $\vec{f}_1, \vec{f}_2 \in \ker \vec{g}_3^T$.

(Emlékeztető: duális vektortér = a vektortérből $\mathbb{R}$-be való lineáris leképezések halmaza).

$$\det(A)=0 \iff \text{inverz } A^{-1} \text{ nem létezik.}$$

$\boxed{49.c}$

Ha $\det(A)\neq 0$, akkor $(A^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{\det(A)} \det(\hat{A}_{ji})$. Az, hogy ez a formula nem működik, ha $\det(A)=0$, önmagában még nem jelenti azt, hogy A^{-1} nem létezik. (Pl. a másodfokú megoldóképlet nem működik az $0x^2+2x+3=0$ egyenletre, de $x=-\frac{3}{2}$ ettől még gyök.)

Viszont $\det(AB)=\det(A)\det(B)$ miatt $\det(E)=1=\det(AA^{-1})=\det(A)\det(A^{-1})$, így ha $\det(A)=0$, akkor A^{-1} nem létezik, hiszen ha létezne, akkor $1=0\cdot\det(A^{-1})$ állna fenn.

Tétel: $\det(AB)=\det(A)\det(B)$

Bizonyítás:

① A $\varphi: V\times V\times\dots\times V\longrightarrow\mathbb{R}$ multilineáris antiszimmetrikus leképezések tere 1 dimenziós, hiszen egy ilyen φ-t meghatároz az, hogy mennyi $\varphi(\vec{e}_1,\dots\vec{e}_n)=\varphi_0$. Ekkor $\varphi=\varphi_0\cdot\det$, hiszen $\det(\vec{e}_1\dots\vec{e}_n)=1$.

② $\varphi(\vec{v}_1,\dots\vec{v}_n)=\det(A\vec{v}_1,\dots,A\vec{v}_n)$ antiszimmetrikus, így

$\det(A\vec{v}_1,\dots,A\vec{v}_n)=c(A)\cdot\det(\vec{v}_1,\dots\vec{v}_n)$ valamely $c(A)$ skalárra.

Beírva $\vec{e}_1\dots\vec{e}_n$-t $\vec{v}_1\dots\vec{v}_n$ helyére:

$$\det(A\vec{e}_1,\dots A\vec{e}_n)=c(A)\cdot\underbrace{\det(\vec{e}_1\dots\vec{e}_n)}_{=1} \implies c(A)=\det(A),$$

hiszen ha $A=\begin{bmatrix} | & & | \\ \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_n \\ | & & | \end{bmatrix}$, akkor $\det(A)=\det(\vec{a}_1,\dots\vec{a}_n)=\det(A\vec{e}_1,\dots A\vec{e}_n)$

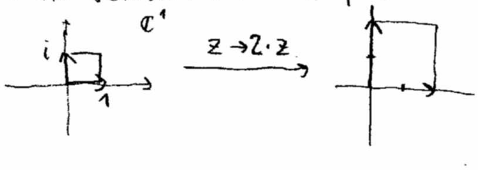
③ $A=\begin{bmatrix} | & & | \\ \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_n \\ | & & | \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} | & & | \\ \vec{b}_1 & \dots & \vec{b}_n \\ | & & | \end{bmatrix}$, $AB=\begin{bmatrix} | & & | \\ A\vec{b}_1 & \dots & A\vec{b}_n \\ | & & | \end{bmatrix}$

$$\det(AB)=\det(A\vec{b}_1,\dots,A\vec{b}_n)=c(A)\det(\vec{b}_1,\dots\vec{b}_n)=\det(A)\cdot\det(B). \quad \text{QED.}$$

Megjegyzés: 1,2,3 dimenziós valós vektorterek esetén a tétel következik a determináns geometriai interpretációjából, pl. 2dimenzióban ha az $\vec{x}\xrightarrow{A}A\vec{x}$ leképezés $\det(A)$-szorosára növeli az orientált területet, míg az $\vec{x}\xrightarrow{B}B\vec{x}$ $\det(B)$-szeresére, akkor az összetett $\vec{x}\xrightarrow{B}B\vec{x}\xrightarrow{A}AB\vec{x}$ leképezés $\det(A)\cdot\det(B)=\det(AB)$-szorosára fogja.

Ez az érv nehezen használható nem valós vektorterekben, pl.

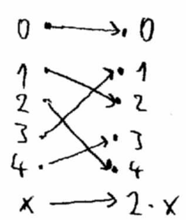
① $\varphi:\mathbb{C}^1\to\mathbb{C}^1$, $\varphi([z])=2\cdot[z]$



Terület $2^2=4$-szeresére nő

② $\varphi:\mathbb{F}_5^1\to\mathbb{F}_5^1$, $\varphi([x])=2\cdot[x]$

($\mathbb{F}_5^1 \cong$ az égészek 5-tel való osztási maradékai)



itt nem sok értelme van orientált hosszúságról beszélni.

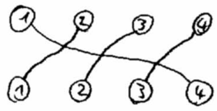
Könnyen invertálható mátrixok

① Permutációmátrixok.

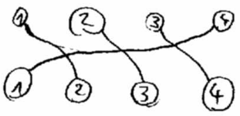
$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \pi^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\pi(1)=2,\ \pi(2)=3,\ \pi(3)=4,\ \pi(4)=1$

$S_\pi(\vec{e}_1)=\vec{e}_2,\ S_\pi(\vec{e}_2)=\vec{e}_3,\ S_\pi(\vec{e}_3)=\vec{e}_4,\ S_\pi(\vec{e}_4)=\vec{e}_1$



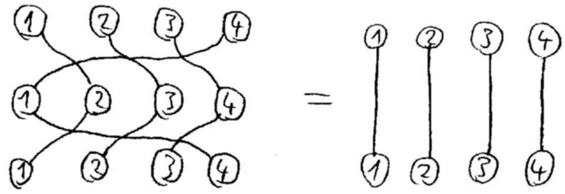
$$S_{\pi^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$S_\pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

π

π^{-1}



$$\pi \circ \pi^{-1} = id \qquad S_\pi S_{\pi^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E$$

② Ortogonális mátrixok (ennek speciális esete a permutációmátrix)

Legyen $\vec{e}_1 \dots \vec{e}_d$ és $\vec{n}_1 \dots \vec{n}_d$ két ortonormált bázis $\mathbb{R}^d$-ben, és legyen $R\vec{e}_i = \vec{n}_i$

Ekkor $R^{-1} = R^T$.

Valóban:

$$\vec{n}_1^T \vec{n}_1 = 1$$

$$R^T R = \begin{bmatrix} — \vec{n}_1^T — \\ \vdots \\ — \vec{n}_i^T — \\ \vdots \\ — \vec{n}_d^T — \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | & & | \\ \vec{n}_1 & \dots & \vec{n}_j & \dots & \vec{n}_d \\ | & & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\vec{n}_1, \vec{n}_1) \dots & & \vdots \\ \vdots & (\vec{n}_i, \vec{n}_j) \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots (\vec{n}_d, \vec{n}_d) \end{bmatrix} = E$$

$$\delta_{ij} = \vec{n}_i^T \vec{n}_j$$

tehát $R^T = R^{-1}$

Példa: Legyen R az $\mathbb{R}^2$ Euklideszi vektortér $30°$-os elforgatásának a mátrixa:

$$R\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos 30° \\ \sin 30° \end{bmatrix}}_{\vec{n}_1}, \quad R\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\sin 30° \\ \cos 30° \end{bmatrix}}_{\vec{n}_2}, \quad R = \begin{bmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

Ekkor

$$\begin{bmatrix} — \vec{n}_1^T — \\ — \vec{n}_2^T — \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | \\ \vec{n}_1 & \vec{n}_2 \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\cos 30° \quad \sin 30°} \\ \boxed{-\sin 30° \quad \cos 30°} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \cos 30° \\ \sin 30° \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -\sin 30° \\ \cos 30° \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tehát

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \cos 30° & \sin 30° \\ -\sin 30° & \cos 30° \end{bmatrix} = R^T = \begin{bmatrix} \cos(-30°) & -\sin(-30°) \\ \sin(-30°) & \cos(-30°) \end{bmatrix}$$

$$\vec{n}_2^T \vec{n}_1 = [-\sin 30°, \cos 30°] \cdot \begin{bmatrix} \cos 30° \\ \sin 30° \end{bmatrix} = (\vec{n}_2, \vec{n}_1) = 0$$

$$\vec{n}_2^T \vec{n}_2 = (\vec{n}_2, \vec{n}_2) = 1$$

S1

③ $A=E+N$, ahol $N^k=0$.

ⓐ Legyen $A=E+N$, $N^2=0$. Ekkor $A^{-1}=E-N$,
hiszen $AA^{-1}=(E+N)(E-N)=E^2-EN+NE-N^2=E-N+N-0=E$.

Példa: $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&2\\0&0\end{bmatrix}$, $\quad\begin{bmatrix}0&2\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}0&2\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2y\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&2\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

tehát $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&2\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\end{bmatrix}$

ⓑ Legyen $A=E+N$, $N^3=0$. Ekkor $A^{-1}=E-N+N^2$,
hiszen $AA^{-1}=(E+N)(E-N+N^2)=EE-EN+EN^2+NE-N^2+N^3=E-N+N^2+N-N^2+0$
$=E$

Példa: $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{bmatrix}$, $\quad\begin{bmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}0&0&8\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

tehát

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&8\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2&+5\\0&1&-4\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Magyarázat: Mértani sor összege: $1+q+q^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}q^n=(1-q)^{-1}$, ha $|q|<1$,

így $\quad 1-q+q^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-q)^n=(1+q)^{-1}$, ha $|q|<1$

$1=(1+q)(1+q)^{-1}=(1+q)(1-q+q^2-q^3+q^4-\ldots)=1+0q+0q^2+0q^3+\ldots$

Itt pl. a $0\cdot q^3$ tag: $[1\cdot(-q^3)]+[q\cdot(+q^2)]=0\cdot q^3$.

Ugyanez érvényes az $1\leftarrow E$, $q\leftarrow N$ helyettesítés után is:

$E=(E+N)(E+N)^{-1}=(E+N)(E-N+N^2-N^3+N^4-\ldots)=E+0\cdot N+0\cdot N^2+0\cdot N^3+\ldots$

A mértani sornál a konvergenciát a $|q|<1$ feltétel biztosította, mátrixok esetén lehetséges, hogy $N\neq 0$, de $N^k=0$ (vagyis N nilpotens).

$$\underbrace{\begin{bmatrix}0&\times&\times&\times&\times\\ &0&\times&\times&\times\\ &&0&\times&\times\\ &\text{\Large 0}&&0&\times\\ &&&&0\end{bmatrix}}_{N}\begin{bmatrix}\times\\\times\\\times\\\times\\\times\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\times\\\times\\\times\\\times\\0\end{bmatrix},\quad N^2\begin{bmatrix}\times\\\times\\\times\\\times\\\times\end{bmatrix}=N\begin{bmatrix}\times\\\times\\\times\\\times\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\times\\\times\\\times\\0\\0\end{bmatrix},\quad N^5\begin{bmatrix}\times\\\times\\\times\\\times\\\times\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\vec{0}$$

$\times$: nem feltétlenül nulla elem

Ha csak a főátló fölött (vagy alatt) vannak nem nulla elemek, akkor a mátrix nilpotens.

ⓒ $$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & 3 & & 1 & \\ & 4 & & & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & -2 & 1 & & \\ & -3 & & 1 & \\ & -4 & & & 1 \end{bmatrix},$$ (üres helyek = nulla elemek)

hiszen $$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & 2 & 0 & & \\ & 3 & & 0 & \\ & 4 & & & 0 \end{bmatrix}}_{N} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix}}_{\vec{v}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2b \\ 3b \\ 4b \end{bmatrix}}_{N\vec{v}}, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & 2 & 0 & & \\ & 3 & & 0 & \\ & 4 & & & 0 \end{bmatrix}}_{N} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2b \\ 3b \\ 4b \end{bmatrix}}_{N\vec{v}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\cdot 0 \\ 3\cdot 0 \\ 4\cdot 0 \end{bmatrix}}_{N^2\vec{v}},$$ tehát $N^2 = 0$

Megjegyzés: ezt majd használjuk a mátrixok LU felbontásában.

pl. $$A = LU = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \times & 1 & 0 \\ \times & \times & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}}_{U}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I.} \\ \mathrm{II.} \\ \mathrm{III.} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I.} \\ \mathrm{II.} + 2\cdot \mathrm{I.} \\ \mathrm{III.} + 3\cdot \mathrm{I.} \end{pmatrix}$$

alsó Δ: L = Lower triangular
felső Δ: U = Upper triangular

egy ilyen mátrixal való szorzás hozzáadja az első sor valahányszorosát a többihez.

Mátrixfüggvények (megjegyzés)

Láttuk, hogy az egyváltozós $f(x) = (1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ függvény $1 = (1+x) f(x)$ azonossága mátrix variánsa:

$$f(N) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n N^n, \qquad E = (E+N) f(N) \Rightarrow f(N) = (E+N)^{-1},$$

ha az elvileg ∞ összeg csak véges sok tagot tartalmaz az $N^k = 0$ feltétel miatt. (ugyanilyen jó az is, ha az N^n hatványok elég gyorsan csökkennek, ahogy $n \to \infty$, de ezt itt nem definiáljuk.) Mindez azért igaz, mert az $1, x$ és a E, N szimbólumoknak a műveleti tulajdonságai a $+, \cdot$ műveletekre nézve nagyon hasonló, pl. $1x = x \cdot 1$, $EN = NE$. Ha két változó is szerepel, akkor tipikusan a függvényre vonatkozó azonosság mátrix variánsa csak akkor teljesül, ha a két mátrix kommutál.

Pl.: $$(1+x)^{-1}(1+y)^{-1} = \frac{1}{1+x}\,\frac{1}{1+y} = \frac{1}{1+x+y+xy} = \left(1 + [x+y+xy]\right)^{-1}$$

$$(E+A)^{-1}(E+B)^{-1} \neq \left(E + [A+B+AB]\right)^{-1},$$

pl. $$\left(E + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)^{-1} \left(E + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\neq \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ha viszont $AB = BA$, akkor

$$(E+A)^{-1}(E+B)^{-1} = \left(E + [A+B+AB]\right)^{-1} = \left(E + [A+B+BA]\right)^{-1}$$