Mátrixalgebra

Def.: a $\vec{v}_1 .. \vec{v}_k$ vektorok lineárisan függetlenek, ha egyikük sem fejezhető ki a többiek lineáris kombinációjaként.

Ekvivalens def.: a $\vec{v}_1 -- \vec{v}_k$ vektorok lin. függetlenek, ha a
$\lambda_1\vec{v}_1 + .. + \lambda_k\vec{v}_k = \vec{0}$ egyenlet egyetlen megoldása $\lambda_1 = \lambda_2 = .. = \lambda_k = 0$.

Bázis: Def 1. Maximális lineárisan független vektorrendszer.
Def 2. Egy olyan vektorrendszer, amelynek az elemeinek a lineáris kombinációjaként bármely vektor egyértelműen felírható. (eltekintve az összeg tagjainak a sorrendjétől).
Def 3. Minimális generátorrendszer, vagyis vektorok olyan minimális (vagyis egy elemét sem lehet elhagyni) halmaza, hogy a vektortér bármely eleme felírható ezen vektorok lineáris kombinációjaként.

Legyen $\varphi: V \to W$ egy lin. leképezés (homomorfizmus) a V és W vektorterek között.

vagyis	vagy	vagy
$\varphi(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \varphi(\vec{v}_1) + \varphi(\vec{v}_2)$ $\varphi(\lambda\vec{v}) = \lambda\varphi(\vec{v})$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$	$\varphi(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2) = \alpha_1\varphi(\vec{v}_1) + \alpha_2\varphi(\vec{v}_2)$ $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$	$\varphi(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi(\vec{v}_i)$ $n = 1, 2, ..,$ $\alpha_i \in \mathbb{R}$

Legyen $\vec{e}_1, .. \vec{e}_d$ a V egy bázisa, és legyen adott $\varphi(\vec{e}_1) = \vec{f}_1, .., \varphi(\vec{e}_d) = \vec{f}_d$.
Az $\vec{f}_i$ vektorok megadják φ-t:

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{d} x_i\vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{d} x_i\varphi(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{d} x_i\vec{f}_i .$$

Ha pl. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ az $\mathbb{R}^3$ standard bázisa: $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, továbbá
$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$, $\vec{f}_3 = \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$, akkor

$$\varphi\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right) = \varphi(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) = x_1\varphi(\vec{e}_1) + x_2\varphi(\vec{e}_2) + x_3\varphi(\vec{e}_2) = x_1\vec{f}_1 + x_2\vec{f}_2 + x_3\vec{f}_3$$

$$= x_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}7\\8\\9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

Tehát:
① a φ leképezés mátrixát a $\varphi(\vec{e}_1), .. \varphi(\vec{e}_d)$ oszlopvektorok alkotják.
② egy mátrix–vektor szorzat a mátrix oszlopainak egy lineáris kombinációját adja meg: pl. $\begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}7\\8\\9\end{bmatrix}$

Mátrixműveletek

Lineáris leképezések természetes módon összeadhatóak, számmal szorozhatóak, és képezhető az összetett függvényük.

mátrix-vektor szorzat (sor-oszlop szorzás)

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1d} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nd} \end{bmatrix}, \quad A\vec{x} = \boxed{\updownarrow n \quad \overrightarrow{\;d\;}} \Big\updownarrow d = \Big\updownarrow n$$

A: n sor, d oszlop: $n \times d$ mátrix. $\quad A: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$

$$(A\vec{x})_i = \sum_{j=1}^{d} A_{ij} x_j$$

mátrix-mátrix műveletek:

összeadás: $(\varphi + \psi)(\vec{v}) = \varphi(\vec{v}) + \psi(\vec{v})$ bármely $\vec{v}$-re.

$$(A+B)\vec{v} = A\vec{v} + B\vec{v}$$

pl. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+7 \\ 3+6 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ nincs értelmezve.

számmal való szorzás:

$$(\lambda\varphi)(\vec{v}) = \lambda \cdot \varphi(\vec{v}) \qquad \text{bármely } \vec{v}\text{-re}$$

pl. $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$

mátrixszorzás: $(\varphi \circ \psi)(\vec{v}) = \varphi(\psi(\vec{v}))$

$$(AB)\vec{v} = A(B\vec{v}). \qquad (*)$$

Itt $A(B\vec{v})$ kiszámításához csak mátrix-vektor szorzásra van szükség. Az, hogy megköveteljük, hogy $(*)$ bármely $\vec{v}$-re fennáll, meghatározza az AB szorzatmátrixot.

példa: $\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5x+7y \\ 6x+8y \end{bmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot(5x+7y)+2\cdot(6x+8y) \\ 3\cdot(5x+7y)+4\cdot(6x+8y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1\cdot 5+2\cdot 6]x + [1\cdot 7+2\cdot 8]y \\ [3\cdot 5+4\cdot 6]x + [3\cdot 7+4\cdot 8]y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 6 & 1\cdot 7+2\cdot 8 \\ 3\cdot 5+4\cdot 6 & 3\cdot 7+4\cdot 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

sor-oszlop szorzás: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \boxed{3 \;\; 4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 5 \\ 6 \end{matrix}} & \begin{matrix} 7 \\ 8 \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ \boxed{3\cdot 5+4\cdot 6} & * \end{bmatrix}$ $\qquad \underbrace{(AB)_{ij}}_{i,j \text{ elem}} = \sum_k \underbrace{A_{ik}}_{i \text{ sor}} \underbrace{B_{kj}}_{j \text{ oszlop}}$

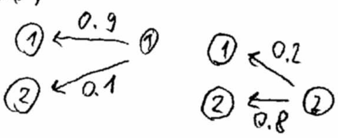
i sor $\quad$ j oszlop $\quad$ i,j elem

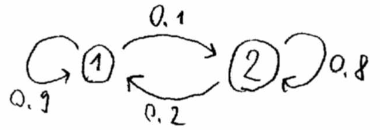
Általánosan: $(AB\vec{v})_i = \sum_j (AB)_{ij} v_j = (A(B\vec{v}))_i = \sum_k A_{ik}\big(\underbrace{\sum_j B_{kj} v_j}_{(B\vec{v})_k}\big) =$

$$= \sum_j \big(\underbrace{\sum_k A_{ik} B_{kj}}_{(AB)_{ij}}\big) v_j. \implies (AB)_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$$

Stochasztikus kétállapotú rendszer. (diszkrét idő)

Állapotok: ① ②   Evolúció, átmeneti valószínűségek:





① valószínűsége

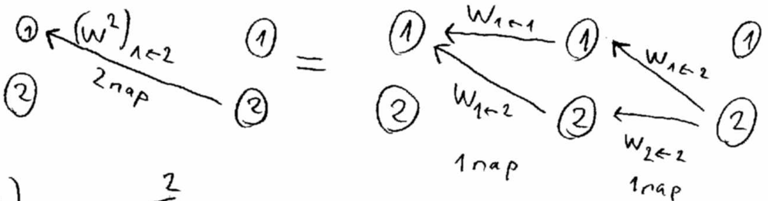
$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{1\ nap} W\vec{p} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} W_{1\leftarrow1} & W_{1\leftarrow2} \\ W_{2\leftarrow1} & W_{2\leftarrow2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Mi történik két nap alatt? (Mennyi $W(W\vec{p}) = W^2\vec{p}$?)

Pl. W^2_{12} :

$$\begin{pmatrix} \boxed{W_{1\leftarrow1} \quad W_{1\leftarrow2}} \\ W_{2\leftarrow1} \quad W_{2\leftarrow2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{1\leftarrow1} & \boxed{\begin{matrix} W_{1\leftarrow2} \\ W_{2\leftarrow2} \end{matrix}} \\ W_{2\leftarrow1} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & \overset{(W^2)_{12}}{W_{1\leftarrow1}W_{1\leftarrow2} + W_{1\leftarrow2}W_{2\leftarrow2}} \\ * & * \end{pmatrix}$$



$$(W\cdot W)_{1\leftarrow2} = \sum_{k=1}^{2} W_{1\leftarrow k}\cdot W_{k\leftarrow2}$$

Feladatok:

① Legyen $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+2y \\ 3x-z \end{bmatrix}$, $\psi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ x-y \end{pmatrix}$. Ha $(\varphi\circ\psi)(\vec{v}) = A\vec{v}$, mennyi A?
Ha $(\psi\circ\varphi)(\vec{v}) = A\vec{v}$, mennyi A?

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \psi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$(\varphi\circ\psi)\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(\psi\circ\varphi)\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

② Legyen $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ -x+2y \\ -y \end{pmatrix}$, $\psi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z \\ x+y \\ x+y+z \end{pmatrix}$. Ha $(\varphi\circ\psi)(\vec{v}) = A\vec{v}$, mennyi A?
Ha $(\psi\circ\varphi)(\vec{v}) = A\vec{v}$, mennyi A?

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = F\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \psi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

$$(\varphi\circ\psi)\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = FP\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$ nincs értelmezve $\overset{2}{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}3 \quad 2 \neq 3$

$$\mathbb{R}^3 \xleftarrow[\varphi]{F} \mathbb{R}^2 \neq \mathbb{R}^3 \xleftarrow[\psi]{P} \mathbb{R}^3$$

$$(\psi\circ\varphi)\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = PF\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{R}^3 \xleftarrow[\psi]{P} \mathbb{R}^3 \quad \mathbb{R}^3 \xleftarrow[\varphi]{F} \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{R}^3 \xleftarrow[\psi\circ\varphi]{PF} \mathbb{R}^2$$

③ Legyen $\varphi([x]) = \begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix}$, $\psi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = [x+y]$. Ha $(\varphi\circ\psi)(\vec{v}) = A\vec{v}$, mennyi A? Ha $(\psi\circ\varphi)(\vec{v}) = A\vec{v}$, mennyi A?

$$\varphi([x]) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}[x] = F[x], \quad \psi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = [1 \ \ 1]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$(\varphi\circ\psi)\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}[1 \ \ 1]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}[1 \ \ 1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^1 \arrow[l, "\varphi", "F"'] & \mathbb{R}^1 & \mathbb{R}^2 \arrow[l, "\psi", "P"'] \arrow[lll, bend left, "\varphi\circ\psi", "FP=A"']
\end{tikzcd}$$

$$(\psi\circ\varphi)([x]) = [1 \ \ 1]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}[x], \qquad A = [1 \ \ 1]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = [3]$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^1 & \mathbb{R}^2 \arrow[l, "\psi", "P"'] & \mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^1 \arrow[l, "\varphi", "F"'] \arrow[lll, bend left, "\psi\circ\varphi", "PF=A"']
\end{tikzcd}$$

④ Legyen $\varphi([x]) = \begin{bmatrix} 2x \\ 3x \end{bmatrix}$, $\psi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-2y \\ 3x+4y \end{bmatrix}$. Ha $(\varphi\circ\psi)(\vec{v}) = A\vec{v}$, mennyi A? Ha $\psi\circ\varphi$ — " —

$$\varphi([x]) = \overbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}}^{F}[x], \quad \psi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$(\varphi\circ\psi)\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{1}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\Big\updownarrow 2$$

$1 \neq 2$, nincs értelmezve.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^1 \arrow[l, "\varphi", "F"'] & \mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^2 \arrow[l, "\psi", "P"']
\end{tikzcd}$$

nem ugyanaz, így $\varphi\circ\psi$ nem értelmezhető

$$(\psi\circ\varphi)([x]) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}[x], \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^2 \arrow[l, "\psi", "P"'] & \mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^1 \arrow[l, "\varphi", "F"'] \arrow[lll, bend left, "\psi\circ\varphi", "PF=A"']
\end{tikzcd}$$

$$(\psi\circ\varphi)([x]) = \begin{bmatrix} -4 \\ 18 \end{bmatrix}[x] = \begin{bmatrix} -4x \\ 18x \end{bmatrix}$$

(5) Ha φ hatása a standard bázison

(a) $\varphi\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$, $\varphi\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$, $\varphi\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}6\\7\end{bmatrix}$, mi φ mátrixa?

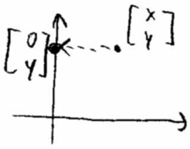
$\varphi(\vec{v})=F\vec{v}$, ahol $F=\begin{bmatrix}2&4&6\\3&5&7\end{bmatrix}$.

(b) $\varphi\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$, $\varphi\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}$, $\varphi\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{pmatrix}8\\9\\10\end{pmatrix}$, mi φ mátrixa?

$\varphi(\vec{v})=Fv$, ahol $F=\begin{bmatrix}2&5&8\\3&6&9\\4&7&10\end{bmatrix}$

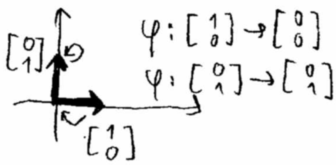
(6) Az $\mathbb{R}^2=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \mid x,y\in\mathbb{R}\right\}$ síkon írd fel a következő φ transzformációk mátrixait!

(a) y-tengelyre való $\perp$ vetítés:



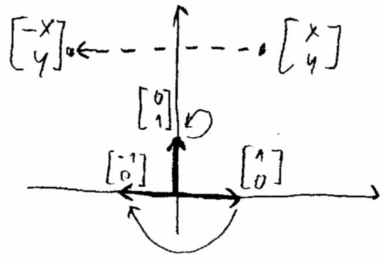
$\varphi\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$, $\quad F=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$

vagy



$\varphi\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, $\varphi\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, $\quad F=\left[\boxed{\begin{matrix}0\\0\end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}}\right]$

(b) y-tengelyre való $\perp$ tükrözés:

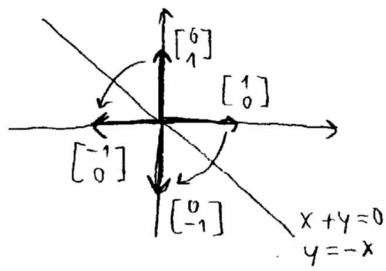


$\varphi\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$, $\quad F=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$

vagy

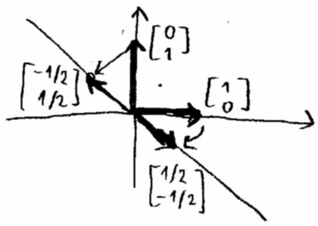
$\varphi\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$, $\varphi\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, $F=\left[\boxed{\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}}\right]$

(c) az $x+y=0$ egyenesre való $\perp$ tükrözés:



$\varphi\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$, $\varphi\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$, $\quad F=\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}$

(d) az $x+y$ egyenesre való $\perp$ vetítés:



$\varphi\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1/2\\-1/2\end{bmatrix}$, $\varphi\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1/2\\1/2\end{bmatrix}$, $\quad F=\begin{bmatrix}1/2&-1/2\\-1/2&1/2\end{bmatrix}$

(e) az $\vec{n}=\begin{bmatrix}-1/2\\\sqrt{3}/2\end{bmatrix}$ egység vektor egyenesére való $\perp$ vetítés:

$\varphi(\vec{v})=(\vec{n},\vec{v})\cdot\vec{n}=\vec{n}\,\vec{n}^T\vec{v}$,

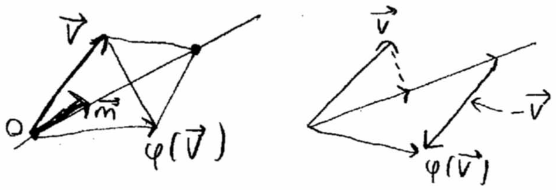
$F=\vec{n}\,\vec{n}^T=\begin{bmatrix}-1/2\\\sqrt{3}/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1/2&\sqrt{3}/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/4&-\sqrt{3}/4\\-\sqrt{3}/4&3/4\end{bmatrix}$

(f) az $\vec{m}=\binom{2}{3}$ vektor egyenesére való $\perp$ vetítés:

$$\varphi(\vec{v})=\left(\frac{\vec{m}}{|\vec{m}|},\vec{v}\right)\cdot\frac{\vec{m}}{|\vec{m}|}=\frac{1}{|\vec{m}|^2}\vec{m}\,\vec{m}^T\vec{v}$$

$$F=\frac{1}{|\vec{m}|^2}\vec{m}\,\vec{m}^T=\frac{1}{2^2+3^2}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\end{bmatrix}=\frac{1}{13}\begin{bmatrix}4&6\\6&9\end{bmatrix}$$

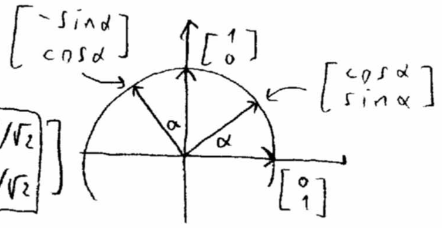
(g) az $\vec{m}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ vektor egyenesére való $\perp$ tükrözés:



$$\varphi(\vec{v})=2\cdot\frac{1}{|\vec{m}|^2}\vec{m}\,\vec{m}^T\vec{v}-\vec{v}$$
$$=\left(\frac{2}{|\vec{m}|^2}\vec{m}\,\vec{m}^T-E\right)\vec{v}$$

$$F=\frac{2}{|\vec{m}|^2}\vec{m}\,\vec{m}^T-E=\frac{2}{13}\begin{bmatrix}4&6\\6&9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\frac{1}{13}\begin{bmatrix}-5&12\\12&5\end{bmatrix}$$

(h) Az origó körüli $\alpha=45^\circ$-os elforgatás:



$$\varphi\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-\sin\alpha\\\cos\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$F=\left[\boxed{\begin{matrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{matrix}}\right]$$

(i) Mi lesz az $\vec{r}=\binom{2}{5}$ vektor 45°-os elforgatottja?

$$R_{45^\circ}(\vec{r})=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$$

(j) Írd fel az $\vec{r}=\binom{2}{5}$ vektort mint $\vec{r}=\alpha_1\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$ alakban!

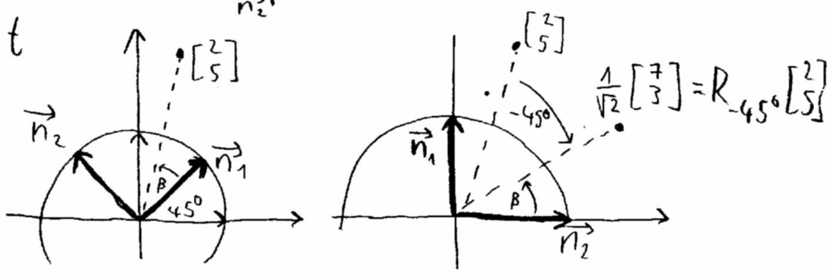
Mennyi $\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}$?

Mivel $\vec{n}_1=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$, $\vec{n}_2=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$ ortonormált bázis,

így
$$\alpha_1=(\vec{n}_1,\vec{r})=(\vec{n}_1,\alpha_1\vec{n}_1+\alpha_2\vec{n}_2)=\alpha_1\overbrace{(\vec{n}_1,\vec{n}_1)}^{1}+\alpha_2\overbrace{(\vec{n}_1,\vec{n}_2)}^{0}$$
$$\alpha_2=(\vec{n}_2,\vec{r})=(\vec{n}_2,\alpha_1\vec{n}_1+\alpha_2\vec{n}_2)=\alpha_1\underbrace{(\vec{n}_2,\vec{n}_1)}_{0}+\alpha_2\underbrace{(\vec{n}_2,\vec{n}_2)}_{1}$$

Tehát
$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\vec{n}_1^T-\\-\vec{n}_2^T-\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overset{\vec{n}_1^T}{\boxed{1/\sqrt{2}\quad 1/\sqrt{2}}}\\\underset{\vec{n}_2^T}{\boxed{-1/\sqrt{2}\quad 1/\sqrt{2}}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\vec{n}_1,\vec{r})\\(\vec{n}_2,\vec{r})\end{bmatrix}$$

Megjegyzés: ez ugyanaz, mint $R_{-45^\circ}\left(\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}\right)$.



(7) Az $\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ térben írd fel a következő φ transzformációk F mátrixait!

(a) y-tengelyre való $\perp$ vetítés:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) y-tengelyre való $\perp$ tükrözés:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x \\ y \\ -z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(c) az x-z síkra való $\perp$ vetítés:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(d) az x-z síkra való $\perp$ tükrözés:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(e) az $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 3/5\cdot\sqrt{2} \\ 4/5\cdot\sqrt{2} \end{bmatrix}$ egységvektor egyenesére való $\perp$ vetítés:

$$\varphi(\vec{r}) = (\vec{n}, \vec{r})\vec{n} = \vec{n}\,\vec{n}^T \vec{r} = F\vec{r}, \quad F = \vec{n}\,\vec{n}^T$$

$$F = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 3/5\cdot\sqrt{2} \\ 4/5\cdot\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 3/5\cdot\sqrt{2} & 4/5\cdot\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 3/5 & 4/5 \\ 3/5 & 9/25 & 12/25 \\ 4/5 & 12/25 & 16/25 \end{bmatrix}$$

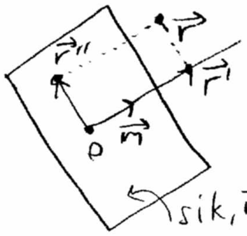
(f) az $\vec{m} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ vektor egyenesére való $\perp$ vetítés:

$$\varphi(\vec{r}) = \left(\frac{\vec{m}}{|\vec{m}|}, \vec{r}\right)\frac{\vec{m}}{|\vec{m}|} = \frac{1}{|\vec{m}|^2}\vec{m}\,\vec{m}^T\vec{r}, \quad F = \frac{1}{|\vec{m}|^2}\vec{m}\,\vec{m}^T$$

$$F = \frac{1}{5^2+3^2+4^2} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} [5, 4, 3] = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 25 & 20 & 15 \\ 20 & 16 & 12 \\ 15 & 12 & 9 \end{bmatrix}$$

Megjegyzés: Mivel $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 5\cdot\sqrt{2}\cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 3/5\cdot\sqrt{2} \\ 4/5\cdot\sqrt{2} \end{bmatrix}$, így F ugyanaz, mit az (e) alfeladatban.

(9) az $\vec{m} = \begin{bmatrix}5\\3\\4\end{bmatrix}$ vektor egyenesére merőleges síkra való $\perp$ vetítés:



$\vec r$ vetülete $\vec m$ egyenesére: $\vec r' = \frac{1}{|\vec m|^2}\vec m \vec m^T \vec r$

$\vec r$ vetülete az $\vec m$-re $\perp$ síkra: $\vec r'' = \vec r - \vec r' =$

$$= E\vec r - \frac{1}{|\vec m|^2}\vec m \vec m^T \vec r =$$

$$= \left(E - \frac{1}{|\vec m|^2}\vec m \vec m^T\right)\vec r$$

$$F = \left(E - \frac{1}{|\vec m|^2}\vec m \vec m^T\right) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} - \frac{1}{50}\begin{pmatrix}25&20&15\\20&16&12\\15&12&9\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{50}\begin{pmatrix}25&-20&-15\\-20&34&-12\\-15&-12&41\end{pmatrix}$$

(8) Legyen két sík egyenlete: $x+y+5z=9$, illetve $2x+3y+13z=23$, aminek táblázatos alakja $\begin{bmatrix}1&1&5&9\\2&3&13&23\end{bmatrix}$. Gauss eliminációval alakítsd át a táblázatot a következő alakúvá: $\begin{bmatrix}1&0&*&*\\0&1&*&*\end{bmatrix}$!

Olvasd ki az így kapott táblázatból az egyenes egy pontját és egy irányvektorát!

$$\begin{bmatrix}1&1&5&9\\2&3&13&23\end{bmatrix} \xrightarrow{II \to II - 2 \cdot I} \begin{bmatrix}1&1&5&9\\0&1&3&5\end{bmatrix} \xrightarrow{I \to I - II} \begin{bmatrix}1&0&\boxed{\begin{matrix}2\\3\end{matrix}}&\boxed{\begin{matrix}4\\5\end{matrix}}\end{bmatrix}$$

Tehát az egyenes egy pontja: $\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}4\\5\end{matrix}}\\0\end{bmatrix}$, egy irányvektora: $\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}2\\3\end{matrix}}\\-1\end{bmatrix}$

Magyarázat:

$$\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

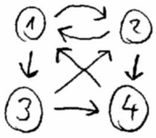
így

$$\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&3\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}4\\5\\0\end{bmatrix} + t\cdot\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}.$$

tehát az $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\5\\0\end{bmatrix} + t\cdot\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4+2t\\5+3t\\-t\end{bmatrix}$ értékek kielégítik

az $x+y+5z=9$, $2x+3y+13z=23$ egyenleteket.

(9) Egy 4 lapból álló hálózat lapjai közötti linkek az ábrán láthatóak:



. Ha az olvasó minden perc végén a következőt csinálja: 50% eséllyel marad ahol volt, 50% eséllyel a lapból kivezető linkek közül választ egyforma eséllyel,

(a) akkor mekkora lesz az 1,2,3,4 állapotok $\vec{p}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\\p_4\end{pmatrix}$ valószínűsége egy perc múlva, ha az aktuális állapot (1) (illetve (2) ...)?

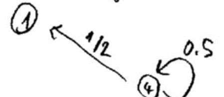
(b) Add meg a $\vec{p}$ vektor $\varphi: \vec{p} \xrightarrow{1\,\text{perc}} \vec{p}\,' = T\vec{p}$ dinamikáját megadó T mátrixot!

(c) Ha az aktuális állapot $\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, akkor mennyi lesz $\vec{p}$ 2 perc múlva?

(a)

linkek:

pl. az utolsó ábrához tartozó átmeneti valószínűségek:



$$\varphi: \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0.5\\1/4\\1/4\\0\end{pmatrix} \qquad \varphi: \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1/4\\0.5\\0\\1/4\end{pmatrix} \qquad \varphi: \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0\\1/4\\0.5\\1/4\end{pmatrix} \qquad \varphi: \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1/2\\0\\0\\0.5\end{pmatrix}$$

$T_{14} = T_{1\leftarrow 4}$

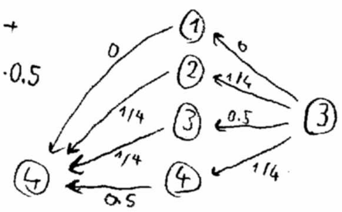
$T_{44} = T_{4\leftarrow 4}$

(b) Tehát T ezen oszlopvektorokból áll:

$$T = \begin{bmatrix} 0.5 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0.5 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Itt pl. $[T^2(\vec{e}_3)]_4 = 5/16 = (T^2)_{43}$

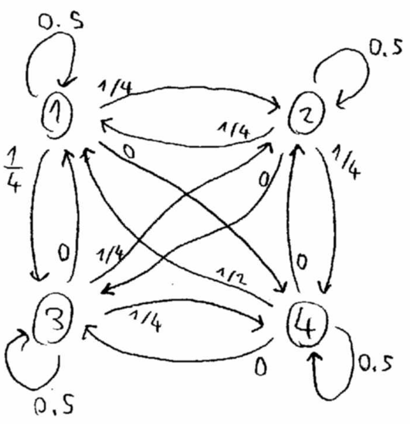
$$\frac{5}{16} = 0\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + 0.5\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot 0.5$$

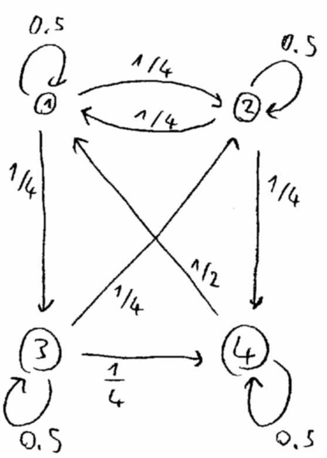


(c) $$\vec{p}_2 = T^2\vec{p}_0 = T^2\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0.5 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 0.5 \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}0\\1/4\\0.5\\1/4\end{bmatrix}}_{T\vec{e}_3,\ T\ \text{harmadik oszlopa}} = \begin{bmatrix}3/16\\1/4\\1/4\\\boxed{5/16}\end{bmatrix}$$

$(T^2)_{4\leftarrow 3}$

Megjegyzés: A négyállapotú rendszer átmeneti valószínűségei:

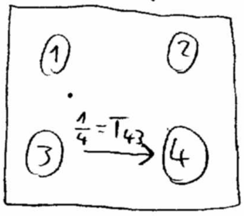




Pl. a $T = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1/4 & \cdot \end{bmatrix}$

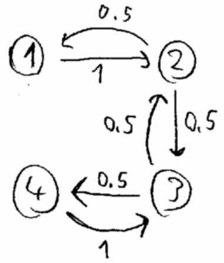
T_{43}

elem a (4) ← (3) linknek felel meg:



(10) | 1 | 2 | 3 | 4 | Egy bolha minden perc végen átugrik a(z egyik) szomszédos mezőre, egyenlő valószínűséggel választva a két (vagy egy) mező közül. Írd fel a $\vec{p}=\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$ vektor evolúcióját megadó mátrixot!

(itt pl. p_3 annak a valószínűsége, hogy a bolha a 3-as mezőn van.)



$$\varphi: \vec{p} \xrightarrow{1 \text{perc}} \vec{p}\,' = T\vec{p}$$

$$T = \begin{bmatrix} T_{1\leftarrow 1} & T_{1\leftarrow 2} & T_{1\leftarrow 3} & T_{1\leftarrow 4} \\ T_{2\leftarrow 1} & T_{2\leftarrow 2} & T_{2\leftarrow 3} & T_{2\leftarrow 4} \\ T_{3\leftarrow 1} & T_{3\leftarrow 2} & T_{3\leftarrow 3} & T_{3\leftarrow 4} \\ T_{4\leftarrow 1} & T_{4\leftarrow 2} & T_{4\leftarrow 3} & T_{4\leftarrow 4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

(11) Egy egydimenziós, négy pixelből álló digitális kamera rossz minőségű lencséje miatt a $\vec{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$ fényességértékek helyett az adott pixelhez és a szomszédja(i)hoz tartozó értékek átlagát rögzíti. Írd fel ezen lin. tr. mátrixát!

| 1 | 2 | 3 | 4 |

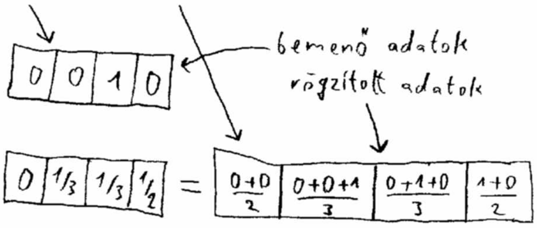
$$k\vec{b} = \begin{bmatrix} (b_1+b_2)/2 \\ (b_1+b_2+b_3)/3 \\ (b_2+b_3+b_4)/3 \\ (b_3+b_4)/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

vagy:

$$k\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad k\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \\ 1/2 \end{bmatrix},$$

tehát

$$K = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$



(12) Ha az F_n sorozat kielégíti az $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ összefüggést, akkor mi az $\varphi: \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix}$ dinamikát megadó T mátrix?

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n+F_{n-1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \text{tehát} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

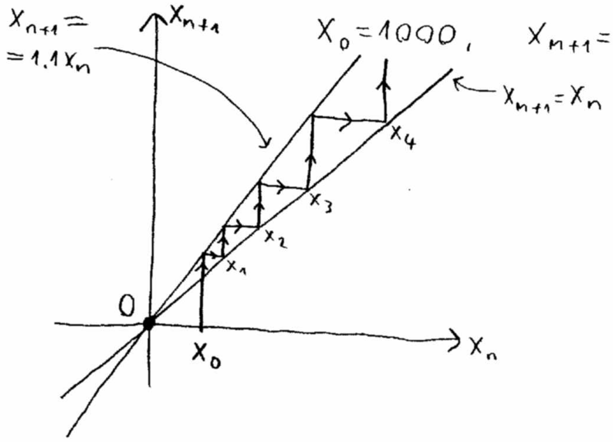
Megjegyzés: A rekurzív összefüggés az $F_0=F_1=1$ kezdeti feltétellel a Fibonacci sorozatot generálja.

$$T^{n-1}\begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix},$$

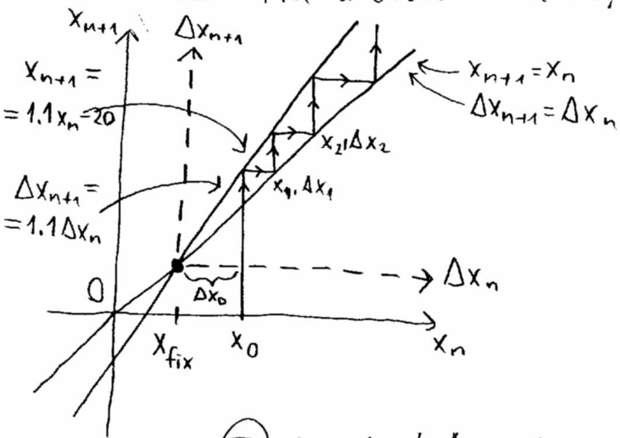
tehát F_n a $T^{n-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektor első komponense.

13 Egy bank évi 10%-os kamatot ad. Ha a betét 1000Ft, mennyi lesz a számlán n év múlva?

$X_0 = 1000, \quad X_{n+1} = 1.1 \cdot X_n \implies X_n = 1.1^n \cdot X_0 = 1.1^n \cdot 1000$



14 Egy bank évi 10%-os kamatot ad, de levon évi 20 Ft kezelési költséget. Ha a betét 1000 Ft, mennyi lesz a számlán n év múlva?



$X_0 = 1000 \qquad X_{n+1} = 1.1X_n - 20 = f(X_n)$

Mennyi $f^n(X_0) = f(f(\ldots f(X_0)\ldots)) = X_n$?

(I) Az $X_{n+1} = f(X_n)$ dinamikai rendszer egyensúlyi állapota, fixpontja:

$$X_{fix} = f(X_{fix})$$

$$X_{fix} = 1.1X_{fix} - 20 \implies X_{fix} = 200$$

(II) koordinátatranszformáció az $x, \Delta x$ koord.rendszerek között:

$$\Delta X_n = X_n - X_{fix} = X_n - 200, \qquad X_n = \Delta X_n + X_{fix} = \Delta X_n + 200$$

(III) ΔX_n dinamikája:

$$X_{n+1} = 1.1X_n - 20$$

$$\Delta X_{n+1} + 200 = 1.1(\Delta X_n + 200) - 20$$

$$\Delta X_{n+1} = 1.1\,\Delta X_n,$$

Vagyis $\Delta X_n = 1.1^n \Delta X_0$.

Tehát: $X_0 = 1000$, $\Delta X_0 = X_0 - X_{fix} = 1000 - 200$, $\Delta X_n = 1.1^n \cdot \Delta X_0$, $X_n = \Delta X_n + 200$,

Vagyis: $X_n = 1.1^n(1000 - 200) + 200$.

Megjegyzés: Ugyanez mátrixhatványozással:

(I) beágyazás eggyel több dimenzióba: $X_0 = 1000 \longrightarrow \vec{X}_0 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1 \end{pmatrix}$

(II) Dinamika 2dim-ben: $X_{n+1} = 1.1X_n - 20 \longrightarrow \vec{X}_{n+1} = \begin{pmatrix} X_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 & -20 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_n \\ 1 \end{bmatrix}$

Tehát X_n:

$$\begin{pmatrix} X_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 & -20 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} X_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 & -20 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1000 \\ 1 \end{bmatrix}$$

14 folyt. Megjegyzés: Mit lehet tenni egy nemlineáris $x_{n+1}=f(x_n)$ dinamikai rendszer esetén? Lineáris approximáció a fixpontok körül.

Legyen $x_{n+1}=3x_n(1-x_n)=f(x_n)$.

(1) Keresd meg a fixpontokat!

$$x_{fix}=f(x_{fix})=3x_{fix}(1-x_{fix})$$

$$x_{fix}=0 \quad \text{vagy} \quad 1=3-3x_{fix} \longrightarrow x_{fix}=\frac{2}{3}.$$

(a) $x_{fix}=0$:

$$\Delta x_n = x_n - x_{fix} = x_n - 0, \quad x_n = x_{fix}+\Delta x_n = 0+\Delta x_n$$

$$\Delta x_{n+1} = f(x_{fix}+\Delta x_n)-x_{fix} = 3(0+\Delta x_n)(1-[0+\Delta x_n]) - 0 = 3\Delta x_n - 3\Delta x_n^2$$

tehát ha $x_n \approx x_{fix}=0$, akkor $|3\Delta x_n^2| << |3\Delta x_n|$, így jó közelítéssel

$$\Delta x_{n+1} \approx 3\Delta x_n, \quad \text{vagyis} \quad \Delta x_n \approx 3^n \cdot \Delta x_0.$$

Ez addig jó közelítés, ameddig $\Delta x_n \approx 0$, ami elég gyorsan megbukik a 3^n szorzó miatt.

(b) $x_{fix}=2/3$:

$$\Delta x_n = x_n - \frac{2}{3}, \quad x_n = \frac{2}{3}+\Delta x_n$$

$$\Delta x_{n+1} = f\left(\frac{2}{3}+\Delta x_n\right)-\frac{2}{3} = 3\cdot\left(\frac{2}{3}+\Delta x_n\right)\left(1-\left[\frac{2}{3}+\Delta x_n\right]\right)-\frac{2}{3} = -1\cdot\Delta x_n - 3\Delta x_n^2$$

tehát ha $x_n \approx x_{fix}=2/3$, akkor $|-3\Delta x_n^2| << |-1\cdot\Delta x_n|$, így jó közelítéssel

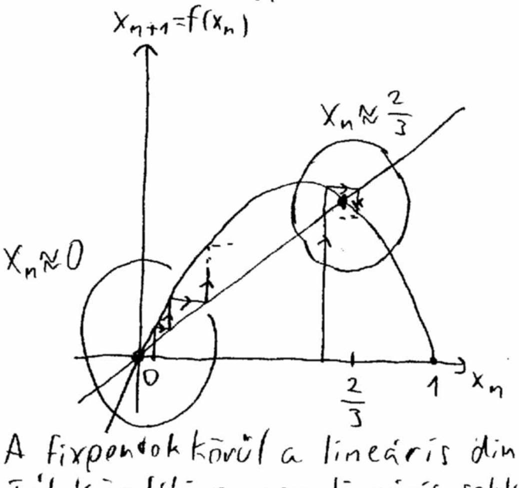
$$\Delta x_{n+1} \approx -1\cdot\Delta x_n, \quad \text{vagyis} \quad \Delta x_n \approx (-1)^n\cdot\Delta x_0.$$

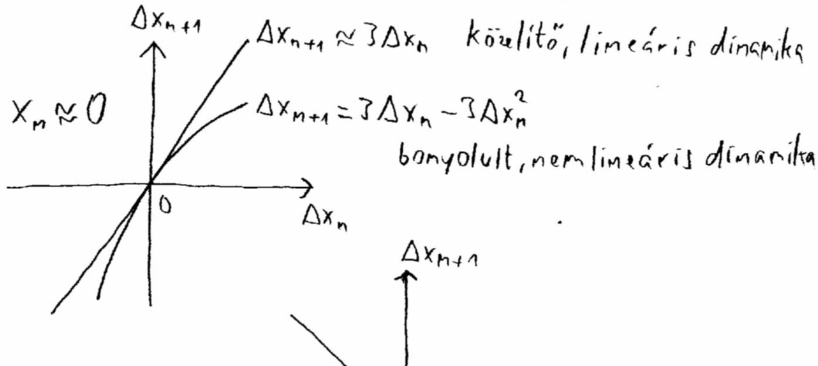
Ez addig jó közelítés, ameddig $\Delta x_n \approx 0$, sajnos az, hogy ez meddig érvényes, az csak a nemlineáris rendszer vizsgálatával állapítható meg.

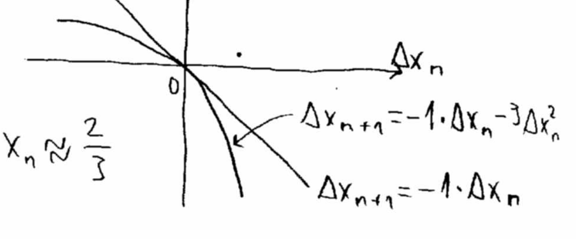
Megjegyzés: az (a) és (b) esetekbeli 3, illetve −1 szorzók kiszámolása deriválással:

$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}=\frac{d(3x-3x^2)}{dx}=3-6x, \quad f'(0)=3-6\cdot 0=3, \quad f'(2/3)=3-6\cdot\frac{2}{3}=-1.$$

Grafikus magyarázat:







A fixpontok körül a lineáris dinamika jól közelíti a nemlineáris, sokkal bonyolultabbat.

(15) A (13)-es feladatban láttuk, hogy az $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ rekurzív sorozat kiszámolható a következő képletek segítségével:

$$\begin{bmatrix}F_{n+1}\\F_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_n\\F_{n-1}\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}F_n\\F_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix}F_1\\F_0\end{bmatrix}.$$

Add meg a $G_{n+1}=G_n+G_{n-1}-3$ sorozat G_n tagját $\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$ hatványai és G_0, G_1 segítségével!

$$\begin{bmatrix}G_{n+1}\\G_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}G_n\\G_{n-1}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}=f\left(\begin{bmatrix}G_n\\G_{n-1}\end{bmatrix}\right).$$

Az $f:\vec{x}\to f(\vec{x})$ leképezés fixpontja:

$$\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\Longrightarrow\left(\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow\begin{bmatrix}0&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}=\vec{x}_{fix}$$

Legyen $\vec{g}_n=\begin{bmatrix}G_n\\G_{n-1}\end{bmatrix}$, $\overrightarrow{\Delta g_n}=\vec{g}_n-\vec{x}_{fix}=\begin{bmatrix}G_n\\G_{n-1}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$, $\vec{g}_n=\vec{x}_{fix}+\overrightarrow{\Delta g_n}$

Ekkor $\overrightarrow{\Delta g_n}$ dinamikája:

$$\vec{g}_{n+1}=f(\vec{g}_n)=f(\vec{x}_{fix}+\overrightarrow{\Delta g_n})=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}+\overrightarrow{\Delta g_n}\right)-\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\overrightarrow{\Delta g_n}+\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix},$$

tehát $\overrightarrow{\Delta g_{n+1}}=\vec{g}_{n+1}-\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\overrightarrow{\Delta g_n}$.

Így $\overrightarrow{\Delta g_n}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}^{n-1}\overrightarrow{\Delta g_1}$.

Vagyis

$$\vec{g}_n=\begin{bmatrix}G_n\\G_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}^{n-1}\left(\begin{bmatrix}G_1\\G_0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$$

Tehát pl. ha $G_0=13$, $G_1=17$ és $G_{n+1}=G_n+G_{n-1}-3$, akkor

$$\begin{bmatrix}G_n\\G_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}^{n-1}\left(\begin{bmatrix}17\\13\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$$

Megjegyzés: Hasonlítsd ezt össze pl. a $x_{n+1}=1.1x_n-200$, $x_0=1000$ sorozatra vonatkozó $x_n=1.1^n(1000-200)+200$ képlettel! ((14) feladat)

Megjegyzés: Ugyanez homogén koordinátákkal:

$$\begin{bmatrix}G_{n+1}\\G_n\\1\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|c}1&1&-3\\1&0&0\\\hline 0&0&1\end{array}\right]\begin{bmatrix}G_n\\G_{n-1}\\1\end{bmatrix},\ \text{vagyis}\ \begin{bmatrix}G_n\\G_{n-1}\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&-3\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix}G_1\\G_0\\1\end{bmatrix}$$