Vektoriális (kereszt) szorzat

Definíció: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

① $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$

② $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jobbsodrású rendszert alkot

③ $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\sin\alpha|$ (α a közbezárt szög)

Tulajdonságok:

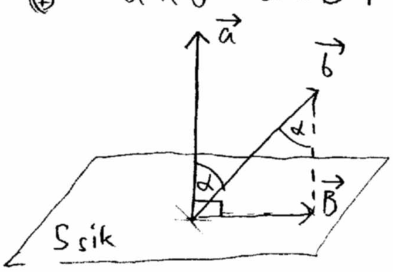
① antiszimmetria: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

② linearitás I. $\vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

③ linearitás II. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Bizonyítás ③:

Ⓘ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{B}$, ahol $\vec{B}$ a $\vec{b}$ vektor $\perp$ vetülete az $\vec{a}$-ra $\perp$ S síkra

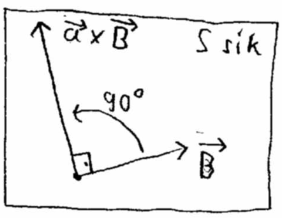


$|\vec{B}| = |\vec{b}| \cdot |\sin\alpha|$

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\sin\alpha| = |\vec{a}| \cdot |\vec{B}| =$

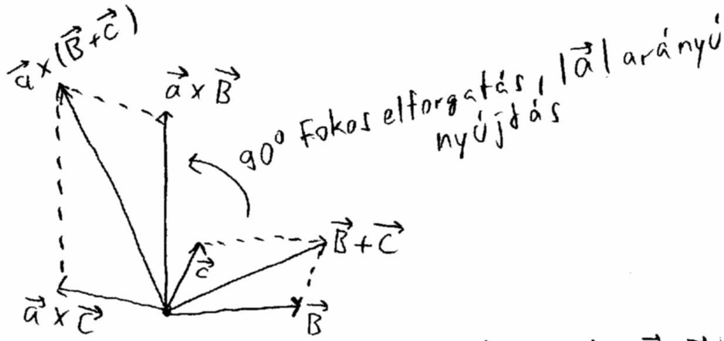
$= |\vec{a}| \cdot |\vec{B}| \cdot |\sin 90°| = |\vec{a} \times \vec{B}|$

Ⓘⓘ $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times (\vec{B} + \vec{C})$



$|\vec{a} \times \vec{B}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{B}|$

$\vec{a} \times$ hatása az S-beli vektorokon: 90° elforgatás, plusz $|\vec{a}|$ arányú nagyítás



Az ábrán látható, hogy $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times (\vec{B} + \vec{C})$

$= \vec{a} \times \vec{B} + \vec{a} \times \vec{C} = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

④ linearitás az első tényezőben:

$(\beta \vec{b} + \gamma \vec{c}) \times \vec{a} \overset{①}{=} -\vec{a} \times (\beta \vec{b} + \gamma \vec{c}) \overset{②③}{=} -[\beta \cdot \vec{a} \times \vec{b} + \gamma \cdot \vec{a} \times \vec{c}] \overset{①}{=}$

$= \beta \cdot \vec{b} \times \vec{a} + \gamma \cdot \vec{c} \times \vec{a}$

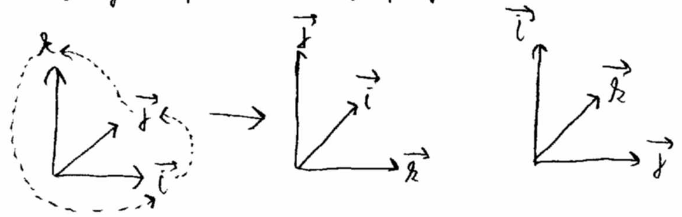
Vektoriális szorzat kiszámítása:

$$(2\vec i+3\vec j+4\vec k)\times(5\vec i+6\vec j+7\vec k)=$$
$$2\cdot5\,\vec i\times\vec i+3\cdot6\,\vec j\times\vec j+4\cdot7\,\vec k\times\vec k$$
$$+2\cdot6\,\vec i\times\vec j+3\cdot5\,\vec j\times\vec i\quad+3\cdot7\,\vec j\times\vec k+4\cdot6\,\vec k\times\vec j\quad+\quad2\cdot7\,\vec i\times\vec k+4\cdot5\,\vec k\times\vec i$$

i, j, k szorzótábla:

① $\vec i\times\vec j=\vec k$, ha $\vec i,\vec j,\vec k$ jobbsodrású ortonormált rendszer

② $\vec i,\vec j,\vec k$ ciklikus permutációi szintén jobbsodrású ortonormált rendszert alkotnak, így $\vec i\times\vec j=\vec k$, $\vec k\times\vec i=\vec j$, $\vec j\times\vec k=\vec i$



③ $\vec j\times\vec i=-\vec i\times\vec j=-\vec k$
$\vec i\times\vec k=-\vec k\times\vec i=-\vec j$
$\vec k\times\vec j=-\vec j\times\vec k=-\vec i$

×	i	j	k
i	0	k	−j
j	−k	0	i
k	j	−i	0

④ $\vec i\times\vec i=\vec j\times\vec j=\vec k\times\vec k=\vec 0$, mivel pl.
$|\vec i\times\vec i|=|\vec i|\cdot|\vec i|\cdot|\sin 0°|=1\cdot1\cdot0=0$

Tehát $(2\vec i+3\vec j+4\vec k)\times(5\vec i+6\vec j+7\vec k)=(3\cdot7-4\cdot6)\,\vec i-(2\cdot7-4\cdot5)\,\vec j+(2\cdot6-3\cdot5)\,\vec k$

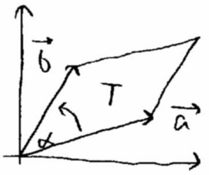
$$=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7\end{vmatrix}=+\begin{vmatrix}3&4\\6&7\end{vmatrix}\vec i-\begin{vmatrix}2&4\\5&7\end{vmatrix}\vec j+\boxed{\begin{vmatrix}2&3\\5&6\end{vmatrix}}\vec k,$$

Töröljük ki a 3×3-as táblázat $\vec k$-t tartalmazó sorát és oszlopát

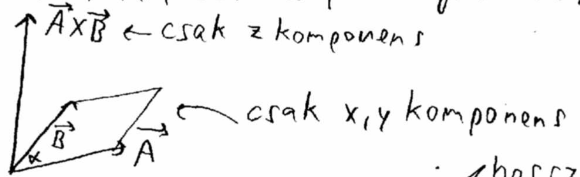
ahol $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc.$ lássuk el az $\boxed{\vec i\ \vec j\ \vec k}$ sort $\boxed{+\ -\ +}$ előjelekkel

2 dimenziós determináns:

$\vec a=(4,1)$, $\vec b=(2,3)$. Mekkora, és milyen orientációjú az $\vec a,\vec b$ vektorok által kifeszített paralelogramma?



Beágyazás 3dim-ba:
$\vec a\to\vec A=(4,1,0)$
$\vec b\to\vec B=(2,3,0)$



Az $\vec a,\vec b$ által generált T terület:

hossz

$$T=|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot|\sin\alpha|=|\vec A|\cdot|\vec B|\cdot|\sin\alpha|=|\vec A\times\vec B|=\left\|\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\4&1&0\\2&3&0\end{vmatrix}\right\|=\left|\begin{vmatrix}4&1\\2&3\end{vmatrix}\cdot\vec k\right|$$

$=|4\cdot3-1\cdot2|$. $\quad\vec a,\vec b$ pozitív orientációjú $\Longleftrightarrow$ $\vec A,\vec B,\vec A\times\vec B$ jobbsodrású.

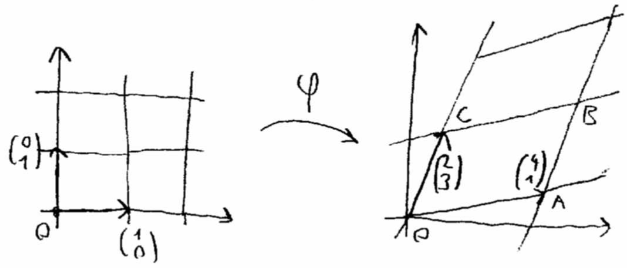
$\begin{vmatrix}4&1\\2&3\end{vmatrix}$ megadja a $(4,1)$ és $(2,3)$ vektorok által generált ▱ előjeles területét (negatív előjel $\Leftrightarrow$ negatív orientáció)

2 dim determináns $\Longleftrightarrow$ 2 ismeretlenes egyenletrendszer megoldhatósága

Egyértelműen megoldható-e
$$4x+2y=77$$
$$1x+3y=66$$

$$\begin{pmatrix}4&2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}77\\66\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}4&2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}4&2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

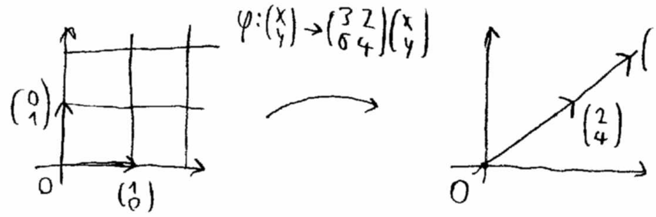
$$\varphi:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4&2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$ egyértelmű megoldhatóság $\Longleftrightarrow$ φ egy-az-egyhez, $\exists\varphi^{-1}$



$\exists\varphi^{-1} \Longleftrightarrow$ OABC▱ területe $\neq 0$

OABC▱ előjeles területét a
$$\begin{vmatrix}\boxed{4\ 1}\\\boxed{2\ 3}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boxed{\begin{matrix}4\\1\end{matrix}}&\boxed{\begin{matrix}2\\3\end{matrix}}\end{vmatrix}=4\cdot3-2\cdot1\neq0$$
determináns adja meg, tehát a z egyenletrendszer egyértelműen megoldható.

Egyértelműen megoldható-e
$$3x+2y=4 \qquad \text{és} \qquad 3x+2y=4$$
$$6x+4y=8 \qquad\qquad\quad 6x+4y=7$$



Itt $\mathbb{R}^2$-t φ az $\left\{t\cdot\binom{2}{4}\,\middle|\,t\in\mathbb{R}\right\}$ egyenesre képzi, az egyenletrendszer megoldható, ha a jobboldal ezen az egyenesen van

$\binom{4}{8}=2\cdot\binom{2}{4}$, ∞ sok megoldás

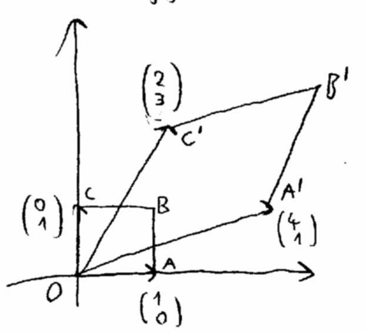
$\binom{4}{7}\neq t\cdot\binom{2}{4}$ bármely t-re, nincs megoldás

Determináns:
$$\begin{vmatrix}\boxed{3\ 6}\\\boxed{2\ 4}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boxed{\begin{matrix}3\\6\end{matrix}}&\boxed{\begin{matrix}2\\4\end{matrix}}\end{vmatrix}=3\cdot4-2\cdot6=0$$

Determináns $\neq 0$ $\Longleftrightarrow$ egyértelmű megoldás

Determináns $=0$ $\Longleftrightarrow$ 0 vagy ∞ sok megoldás

Megjegyzés: a 2d determinánst a 3d vektoriális szorzatból származtattuk, ami függ az Euklédeszi struktúrától. A determináns már ettől független.

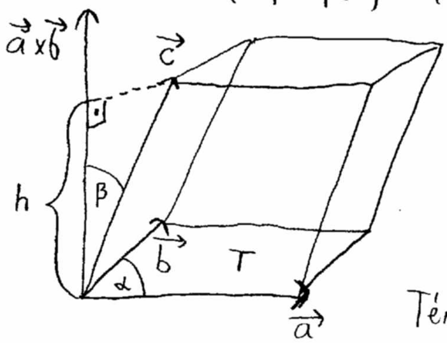


Az OABC□ és az OA'B'C'▱ területeinek az aránya független a síkbeli távolságméréstől és merőlegességtől.

Vegyesszorzat (3dim determináns)

$$\vec a\vec b\vec c = (\vec a,\vec b,\vec c) = (\vec a\times\vec b)\cdot\vec c = (\vec a\times\vec b,\vec c)$$ skaláris szorzat

vektoriális szorzat



a ferde tégla (paralepipedon) előjeles térfogata ($\vec a,\vec b,\vec c$ jobbsodrású: előjel plusz; $\vec a,\vec b,\vec c$ balsodrású: előjel minusz):

Térfogat: $T\cdot h = (|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot|\sin\alpha|)\cdot(|\vec c|\cdot|\cos\beta|)$

$= |\vec a\times\vec b|\cdot|\vec c||\cos\beta| = |((\vec a\times\vec b),c)| = |\vec a\vec b\vec c|$

Tehát $\vec a\vec b\vec c$ kiszámolja az előjeles térfogatot.

Numerikus kiszámítás:

$$((1,2,3),(4,5,6),(2,1,7)) = \left(\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\1&2&3\\4&5&6\end{vmatrix},(2,1,7)\right) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix}2&3\\5&6\end{vmatrix}\vec i - \begin{vmatrix}1&3\\4&6\end{vmatrix}\vec j + \begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}\vec k,\ 2\vec i+1\vec j+7\vec k\right) =$$

$$= 2\cdot\begin{vmatrix}2&3\\5&6\end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix}1&3\\4&6\end{vmatrix} + 7\cdot\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2&1&7\\1&2&3\\4&5&6\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-\ \vec c\ -\\-\ \vec a\ -\\-\ \vec b\ -\end{vmatrix}$$

Ha $\begin{vmatrix}2&1&7\\1&2&3\\4&5&6\end{vmatrix}$ kiszámításának a módja:

determináns

① Kapjon az első sor váltakozó előjeleket:

$\boxed{2\quad 1\quad 7} \longrightarrow \boxed{+\quad -\quad +}$

② Minden elemére az első sornak csináljuk ezt: töröljük ki az elem oszlopát és az első sort, majd szorozzuk össze az elemet, az előjelet és a 2x2-es táblázat értékét, végül összegezzük az így kapott számokat.

$$\begin{vmatrix}\overset{+}{2}&\overset{-}{1}&\overset{+}{7}\\1&2&3\\4&5&6\end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix}2&3\\5&6\end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix}1&3\\4&6\end{vmatrix} + 7\cdot\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix} = 2\cdot(2\cdot6-3\cdot5)-1\cdot(1\cdot6-3\cdot4)+7\cdot(1\cdot5-2\cdot4)$$

$$\begin{array}{ccc}\cancel{2}&\cancel{1}&\cancel{7}\\1&\cancel{2}&3\\4&\cancel{5}&6\end{array}$$

Vektoriális szorzás, Feladatok

① $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(4,5,6)$. Mennyi $\vec{a}\times\vec{b}$?

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(2\cdot6-3\cdot5)\vec{i}-(1\cdot6-3\cdot4)\vec{j}+(1\cdot5-2\cdot4)\vec{k}=(-3,6,-3)$$

② $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(4,5,6)$. Mennyi az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ által kifeszített paralelogramma (ez az $\{s\vec{a}+t\vec{b}\mid a,b\in[0,1]\}$ halmaz) területe?

$$\text{Terület}_{\square}=|\vec{a}\times\vec{b}|=|(-3,6,-3)|=\sqrt{(-3)^2+6^2+(-3)^2}=3\cdot\sqrt{6}$$

③ $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(4,5,6)$. Mennyi az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ által kifeszített háromszög (ez az $\{s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{0}\mid s,t,u\geq0,\ s+t+u=1\}$ halmaz) területe?

$$\text{Terület}_{\Delta}=\frac{1}{2}\text{Terület}_{\square}=\frac{1}{2}\cdot3\cdot\sqrt{6}$$

④ Adott egy sík 3 pontja: $P=(1,1,1)$, $Q=(2,3,4)$, $R=(5,6,7)$.
Írd fel a sík normálegyenletét!

$\vec{a}=\vec{OQ}-\vec{OP}=(1,2,3)$
$\vec{b}=\vec{OR}-\vec{OP}=(4,5,6)$ síkbeli vektorok, így $\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=(-3,6,-3)$

merőleges $\vec{a}$, $\vec{b}$-re, tehát használható a sík normálvektoraként.

$$\vec{n}\,(\vec{r}-\vec{OP})=0$$

$$(-3,6,-3)\cdot((x-1),(y-1),(z-1))=0$$

$$-3x+6y-3z-0=0$$

⑤ Legyen $S=(7,8,5)$, és legyen adott egy sík három pontja: $P=(1,1,1)$, $Q=(2,3,4)$, $R=(5,6,7)$

Milyen messze van S a PQR pontok síkjától? Mekkora a $PQRS_{\Delta}$ tetraéder térfogata?

① A sík normálegyenlete: $-3x+6y-3z=0$. ④-es feladat

② A $\vec{PQ}$, $\vec{PR}$ vektorok által kifeszített Δ területe: $\frac{1}{2}\cdot3\cdot\sqrt{6}$. ③-as feladat

③ Sík–S távolság:

$$d=\left|\left(\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|},\ \vec{OS}-\vec{OP}\right)\right|=\left(\frac{(-3,6,-3)}{3\cdot\sqrt{6}},\ (6,7,4)\right)=\frac{1}{3\cdot\sqrt{6}}\cdot12=\frac{4}{\sqrt{6}}$$

④ Tetraéder térfogata $=\frac{1}{3}\cdot$(alapterület)$\cdot$magasság $=$

$$=\frac{1}{3}\text{Terület}_{PQR\Delta}\cdot d=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot|\vec{PQ}\times\vec{PR}|\right)\cdot d=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot(3\cdot\sqrt{6})\right)\cdot\frac{4}{\sqrt{6}}=2$$

⑥ Legyen $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(4,5,6)$, $\vec{c}=(6,7,4)$.
Mennyi az $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ vegyes szorzat?

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(-3,6,-3)\cdot(6,7,4)=-3\cdot6+6\cdot7-3\cdot4=12,$$

vagy

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\6&7&4\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}5&6\\7&4\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}4&6\\6&4\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}4&5\\6&7\end{vmatrix}$$
$$=1\cdot(5\cdot4-6\cdot7)-2\cdot(4\cdot4-6\cdot6)+3\cdot(4\cdot7-5\cdot6)=12$$

⑦ Legyen adott négy pont: $P=(1,1,1)$, $R=(5,6,7)$, $Q=(2,3,4)$, $S=(7,8,5)$.
Mekkora a PQRS tetraéder térfogata?

$$\text{Térfogat}=\left|\frac{1}{6}(\vec{PQ},\vec{PR},\vec{PS})\right|=\left|\frac{1}{6}((1,2,3),(4,5,6),(6,7,4))\right|=\left\|\begin{matrix}1&2&3\\4&5&6\\6&7&4\end{matrix}\right\|\cdot\frac{1}{6}=\frac{12}{6}=2$$

(Ugyanaz mint az ⑤-ös feladatban)

⑧ Egy síkban vannak-e a következő pontok?

Ⓐ $P=(1,1,1)$, $Q=(2,3,4)$, $R=(5,6,7)$, $S=(7,8,5)$.

$$(\vec{PQ},\vec{PR},\vec{PS})=((1,2,3),(4,5,6),(6,7,4))=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\6&7&4\end{vmatrix}=12\neq0,$$ tehát NEM

Ⓑ $P=(1,1,1)$, $Q=(2,3,4)$, $R=(5,6,7)$, $S=(6,8,10)$.

$$(\vec{PQ},\vec{PR},\vec{PS})=((1,2,3),(4,5,6),(5,7,9))=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\6&7&4\end{vmatrix}=0,$$ tehát IGEN.

(Valóban, $(5,7,9)=1\cdot(1,2,3)+1\cdot(4,5,6)$)

⑨ Egy egyenesen vannak-e a következő pontok: $P=(1,1)$, $Q=(3,4)$, $R=(5,7)$

$\vec{PQ}=(2,3)$, $\vec{PR}=(4,6)$. $\det\begin{pmatrix}2&3\\4&6\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}2&3\\4&6\end{vmatrix}=2\cdot6-4\cdot3=0$, tehát IGEN

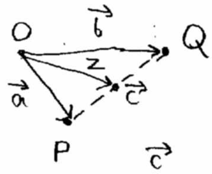
⑩ Mekkora a $P=(1,1)$, $Q=(3,4)$, $R=(8,6)$ pontok által kifeszített Δ területe?

$\vec{PQ}=(2,3)$, $\vec{PR}=(7,5)$, $\text{Terület}_{PQR\Delta}=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix}2&3\\7&5\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot|2\cdot5-3\cdot7|=\frac{11}{2}$

⑪ Legyen adott két sík: $1x+2y+3z=6$, $4x+5y+6z=7$. Keresd meg az egyenes metszetük irányvektorát egységnyi hosszal és pozitív x-komponenssel!
A síkok normálvektorai: $(1,2,3)$, $(4,5,6)$. Az egyenes irány $\perp$ ezekre, így az irányvektor lehetne $(1,2,3)\times(4,5,6)=(-3,6,-3)$. Tehát a megkívánt normalizációval az egyenes irányvektora:

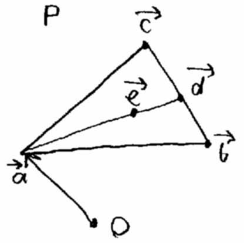
$$\vec{v}=-\frac{1}{\sqrt{3^2+6^2+3^2}}(-3,6,-3)=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$$

Konvex kombináció:



$$\vec{OZ} = \vec{OP} + t\cdot\vec{PQ} = \vec{OP} + t\cdot(\vec{OQ} - \vec{OP}) = t\cdot\vec{OQ} + (1-t)\vec{OP}\ ,\quad t\in[0,1]$$

$$\vec{c} = t\vec{b} + (1-t)\vec{a} = t\vec{b} + s\vec{a},\ \text{ahol}\ \ t+s=1,\ \ t,s\geq 0$$



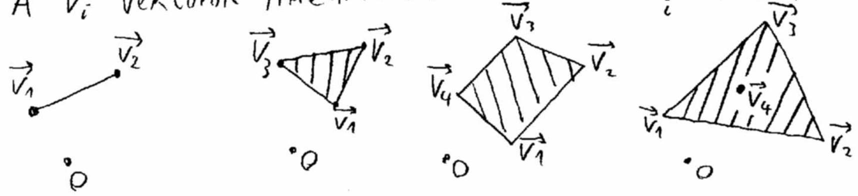
$$\vec{d} = t\vec{b} + s\vec{c}\ ,\quad t+s=1,\ t,s\geq 0$$

$$\vec{e} = u\vec{d} + v\vec{a} = u(t\vec{b} + s\vec{c}) + v\vec{a} = \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \alpha\vec{a}\ ,\quad u+v=1,\ u,v\geq 0$$

$$\beta = ut,\ \gamma = us,\ \alpha = v,\quad \alpha,\beta,\gamma\geq 0$$

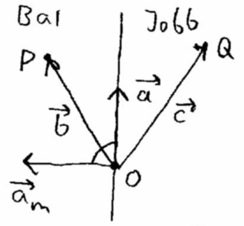
$$\alpha+\beta+\gamma = ut + us + v = u(t+s) + v = u+v = 1$$

A $\vec{v_i}$ vektorok lineáris kombinációja: $\sum_i \alpha_i \vec{v_i}$, $\ \alpha_i \geq 0,\ \sum_i \alpha_i = 1$



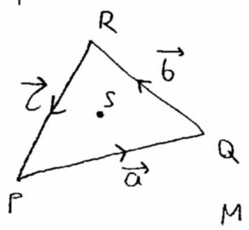
2, 3, 4 pont lineáris kombinációjainak halmaza
(Konvex burok)

(12) Vegyük a $P=(1,0)$, $Q=(4,1)$, $R=(3,5)$ pontok által kifeszített Δ-et!
Beleesik-e a Δ-be az $S=(3,1)$, illetve a $T=(2,4)$ pont?



$Q \in$ Jobb félsík $\iff (\vec{a}_m, \vec{c}) < 0$

$P \in$ Bal félsík $\iff (\vec{a}_m, \vec{b}) > 0$



$\vec{a} = Q-P = (3,1)$ $\qquad \vec{a}_m = (-1,3)$

$\vec{b} = R-Q = (-1,4)$ $\qquad \vec{b}_m = (-4,-1)$

$\vec{c} = P-R = (-2,-5)$ $\qquad \vec{c}_m = (5,-2)$

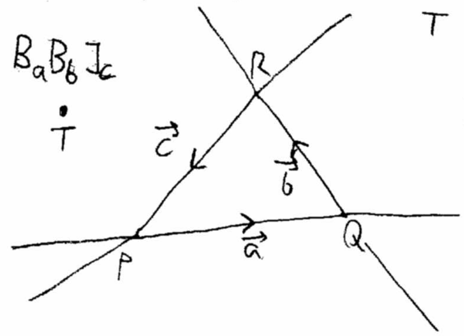
Mivel $(\vec{a}_m, \vec{b}) > 0$ (és $(\vec{b}_m, \vec{c}), (\vec{c}_m, \vec{a})$ is) így a Δ határának a $P\to Q\to R\to P$ orientációja pozitív.

S beleesik a háromszögbe $\iff (\vec{a}_m, \vec{PS}) > 0$ ÉS $(\vec{b}_m, \vec{QS}) > 0$ ÉS $(c_m, \vec{RS}) > 0$

$((-1,3),(2,1)) = 1 > 0$, $((-4,1),(-1,0)) = 4 > 0$, $((5,-2),(0,-4)) = 8 > 0$, S beleesik a Δ-be.

T-re ugyanez:

$((-1,3),(1,4)) = 11 > 0$, $((-4,1),(-2,3)) = 11 > 0$, $((5,-2),(-1,-1)) = \underline{-3 < 0}$, T nem esik bele.



T Balra van $\vec{a}$-nak a PQ egyenesén (B_a)
— " — $\vec{b}$ — " — RP — " — (B_b)
Jobbra van $\vec{c}$-nek a RP — " — (J_c)

A P,Q,R,S pontok konvex burka: $PQR\Delta$

A P,Q,R,T ——— " ———: $PQRT\square$

12. feladat) Ha $S \in PQR\Delta$, akkor felírható az $\vec{OP}, \vec{OQ}, \vec{OR}$ vektorok konvex kombinációjaként: (oszlopvektor jelölésben)

$$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&4&3\\0&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\s\\u\end{pmatrix}$$

, továbbá $t+s+u=1$, $t,s,u \geq 0$.

tehát
$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&4&3\\0&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\s\\u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$$
mivel $1\cdot t + 1\cdot s + 1\cdot u = 1$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}t\\s\\u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4/13\\8/13\\1/13\end{pmatrix}$$
, mind pozitív, így $S \in (P,Q,R$ konvex burka$)$

13) Mennyi t, ha az $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(4,5,6)$, $\vec{c}=(t,8,7)$ vektorok nem lineárisan függetlenek? (Vagyis pl. $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.)

Ekkor $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$, vagyis

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\t&7&8\end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix}5&6\\7&8\end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix}4&6\\t&8\end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix}4&5\\t&7\end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(5\cdot 8 - 6\cdot 7) - 2\cdot(4\cdot 8 - 6t) + 3\cdot(4\cdot 7 - 5\cdot t) = 18 - 3t = 0$$

vagyis $t=6$.

14) Mikor oldható meg egyértelműen az

$$\begin{pmatrix}1&4&t\\2&5&7\\3&6&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}77\\66\\3\end{pmatrix}$$

egyenletrendszer? (13 példa, oszlopvektor jelölés)

Egyértelmű megoldás: $\det\begin{pmatrix}1&4&t\\2&5&7\\3&6&8\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}1&4&t\\2&5&7\\3&6&8\end{vmatrix} = 18 - 3t \neq 0$

vagyis $t \neq 6$.

15) Mennyi s, ha az

$$\begin{pmatrix}1&4&\boxed{6}\\2&5&7\\3&6&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s\\9\\8\end{pmatrix}$$

egyenletnek van megoldása

Gauss elimináció:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&4&6&s\\2&5&7&9\\3&6&8&8\end{array}\right] \xrightarrow[III \to III - 3\cdot I]{II \to II - 2\cdot I} \left[\begin{array}{ccc|c}1&4&6&s\\0&-3&-5&9-2s\\0&-6&-10&8-3s\end{array}\right] \xrightarrow{III \to III - 2\cdot II} \left[\begin{array}{ccc|c}1&4&6&s\\0&-3&-5&9-2s\\0&0&0&-10+s\end{array}\right]$$

vagyis $0x + 0y + 0z = -10 + s$, tehát $\boxed{s = 10}$

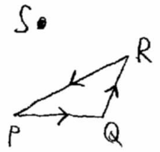
$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&4&6&10\\0&-3&-5&-11\end{array}\right] \xrightarrow{I \to I - \frac{4}{-3} II} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-2/3&-14/3\\0&-3&-5&-11\end{array}\right] \xrightarrow{II \to \frac{1}{-3} II} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&\boxed{-2/3}&\boxed{-14/3}\\0&1&\boxed{5/3}&\boxed{11/3}\end{array}\right]$$

Általános megoldás: $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-14/3\\11/3\\0\end{bmatrix} + t\cdot\begin{bmatrix}-2/3\\5/3\\-1\end{bmatrix}$

(16) Legyen adott négy pont: $P=(0,0,0)$ $R=(0,1,0)$ $Q=(1,0,0)$ $S=(0,0,1)$, továbbá $T=(-1,-1,-1)$

Mennyi a PQRST pontok konvex burkának a térfogata?

① Keressünk a PQRS tetraéder minden oldalához egy kifelé mutató normálvektort!



$$\vec{PQ}\times\vec{QR}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\vec{k}=(0,0,1)=\vec{n}'_{PQR}$$

$(\vec{PS},\vec{n}'_{PQR})=\big((0,0,1),(0,0,1)\big)=1>0$, így a kifelé mutató normálvektor: $\vec{n}_{PQR}=(0,0,-1)$

Hasonló módon kapjuk, hogy

$\vec{n}_{PQS}=(0,-1,0)$

$\vec{n}_{PRS}=(-1,0,0)$

$\vec{n}_{RQS}=(1,1,1)$

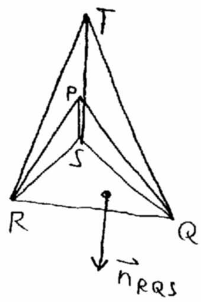
② Hol van T?

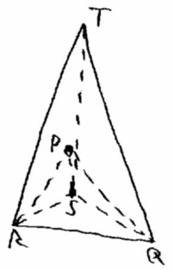
$(\vec{n}_{PQR},\vec{PT})=\big((0,0,-1),(-1,-1,-1)\big)=1>0$

$(\vec{n}_{PRS},\vec{PT})=\big((0,-1,0),(-1,-1,-1)\big)=1>0$

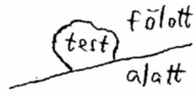
$(\vec{n}_{PRS},\vec{PT})=\big((-1,0,0),(-1,-1,-1)\big)=1>0$

$(\vec{n}_{RQS},\vec{PT})=\big((1,1,1),(-1,-1,-1)\big)=-3<0$





T az RQS sík "fölött" van, és a PQR, PQS, PRS síkok "alatt" van.



Tehát P benne van a RQST tetraéderben.

$$\text{Térfogat}_{RQST}=\frac{1}{6}\left|(\vec{TS},\vec{TQ},\vec{TR})\right|=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=\left(1\cdot\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}\right)\cdot\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 4=\frac{2}{3}$$