Lineáris Algebra

Alapvető problémák: lineáris egyenletrendszerek megoldása,
lineáris leképezések tulajdonságai

Törtlnelem:

Kilenc fejezete a matematika művészetének (Kína, ie. II., Gauss-elimináció)

Fibonacci, 1202: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 ... $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}8\\5\end{pmatrix} \to \dots \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1x+1y\\1x+0y\end{pmatrix}$

Descartes 1637: geometria $\longleftrightarrow$ algebra

Determináns (lin. egy. megoldhatósága): Cardano ~1600, Leibnitz, Takazaku 1683

Mátrix: Leibnitz, Sylvester 1848, Cayley 1856 szorzás, inverz.

Lin. Alg. elmélete: Grassmann 1848, vektortér: Peano 1888
Jordan normál forma (1868, Weierstrass)

Mintapélda I. Egy juhásznak birkái és tyúkjai vannak, ezeknek 3 feje és nyolc lába van összesen. Hány tyúkja és birkája van a juhásznak?

$$1\cdot b + 1\cdot t = 3$$
$$4\cdot b + 2\cdot t = 8$$

Megold. 1. $t = 3 - b$, $4b + 2\cdot(3-b) = 8$, $2b + 6 = 8 \to b = 1$, $t = 3 - 1 = 2$

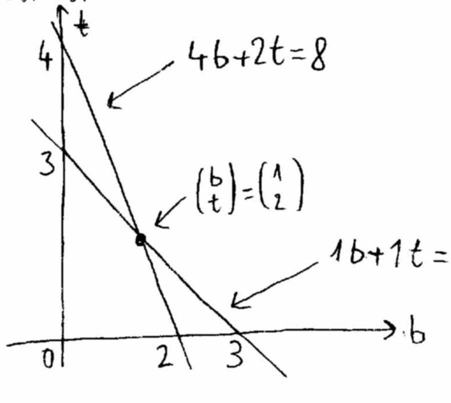
Megold. 2. Gauss elimináció

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & 1b+1t=3 \\ \text{II.} & 4b+2t=8 \end{array} \xrightarrow{\text{II} \to \text{II} - 4\cdot\text{I}} \begin{array}{l} 1b+1t=3 \\ 0b-2t=-4 \end{array} \xrightarrow{\text{II} \to \frac{1}{-2}\text{II}} \begin{array}{l} 1b+1t=3 \\ 0b+1t=2 \end{array} \xrightarrow{\text{I} \to \text{I} - \text{II}} \begin{array}{l} 1b+0t=1 \\ 0b+1t=2 \end{array}$$

tehát $b=1$, $t=2$. Ugyanez műveleti jelek nélkül:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 8 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \to \text{megold} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Geometria 1.

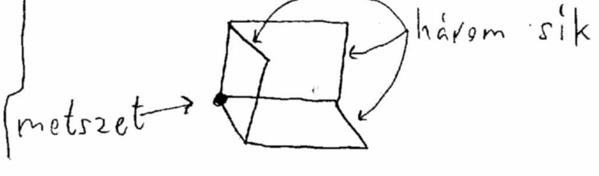


egy egyenlet (pl. $1b+1t=3$) eggyel csökkenti a dimenziók számát, esetünkben $2 \to 2-1=1$.

3 dimenzióban: pl

$1x_1+2x_2+3x_3=4$ ← egy sík egyenlete
$2x_1-1x_2+x_3=5$
$3x_1+1x_2+5x_3=6$

a megoldás három sík metszete:



Geometria 2. $\varphi: \begin{pmatrix}\text{birka}\\ \text{tyúk}\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}\text{fej}\\ \text{láb}\end{pmatrix}$, $\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

1 birka: 1 fej, 4 láb $\varphi\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$, 1 tyúk: 1 fej, 2 láb $\varphi\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

b darab birka: $\varphi\left(\begin{bmatrix}b\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1b\\4b\end{pmatrix} = b\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ t darab tyúk: $\varphi\left(\begin{bmatrix}0\\t\end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\cdot t\\2\cdot t\end{pmatrix} = t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

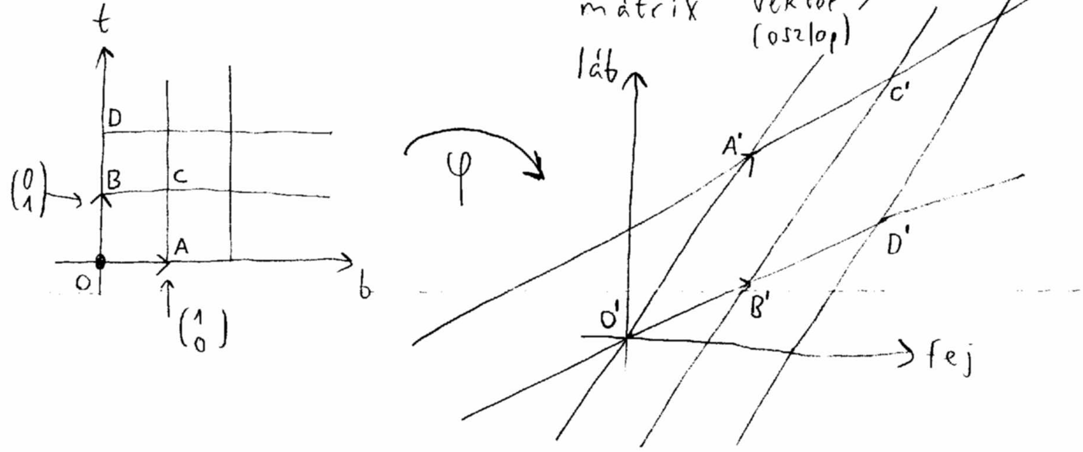
3 birka, 2 tyúk $\varphi\left(\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3\cdot 1 + 2\cdot 1\\ 3\cdot 4 + 2\cdot 2\end{bmatrix} = \varphi\left(\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\right) = 3\cdot\varphi\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) + 2\cdot\varphi\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$

$$= 3\cdot\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

b birka, t tyúk:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix}b\\t\end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\cdot b + 1\cdot t\\ 4\cdot b + 2\cdot t\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\boxed{1 \quad 1}\\ \boxed{4 \quad 2}\end{pmatrix}}_{\text{mátrix}}\underbrace{\begin{pmatrix}b\\t\end{pmatrix}}_{\substack{\text{vektor}\\ \text{(oszlop)}}}$$

"sor-oszlop" szorzás



egyenlet megoldás $\approx$ φ-nek az inverzének a kiszámítása:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix}b\\t\end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}, \quad \begin{bmatrix}b\\t\end{bmatrix} = \varphi^{-1}\left(\begin{bmatrix}3\\8\end{bmatrix}\right)$$

$\mathbb{R}^2$ természetes műveletei:

két vektor összeadása: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\end{pmatrix}$

vektorok összeadása

(valós) számok összeadása

vektor számmal történő szorzása: $\lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda x_1\\ \lambda x_2\end{pmatrix}$

φ-t lineáris leképezésnek nevezhetjük, mert φ "kompatibilis" ezekkel a műveletekkel:

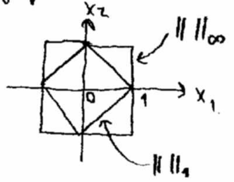
$$\varphi(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \varphi(\vec{v}_1) + \varphi(\vec{v}_2)$$
$$\varphi(\lambda\vec{v}_1) = \lambda\varphi(\vec{v}_1)$$

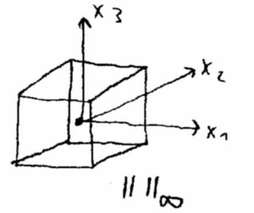
Skalárszorzat, Euklédeszi vektorterek.

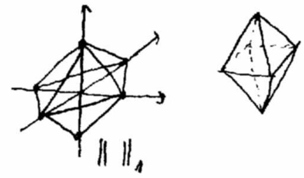
Mennyi legyen $\vec{x} = (x_1 \ldots x_n)$ hossza (normája)? Lehet pl.

$$\|\vec{x}\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \|\vec{x}\|_\infty = \max_i |x_i|$$

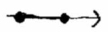
Egységgömb:

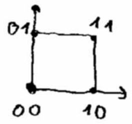
2d: 

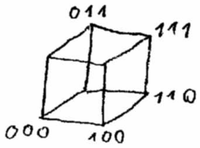
3d: 

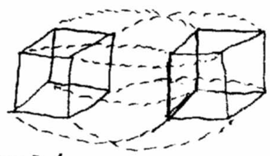


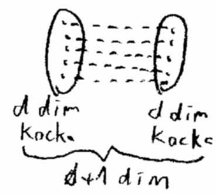
n-dim kocka (hyperkocka)

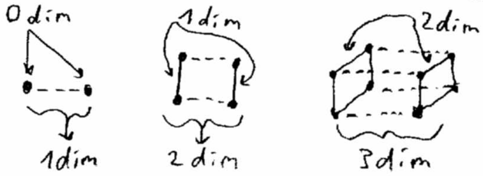
1d: 

2d: 

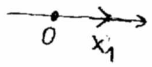
3d: 

4d: 

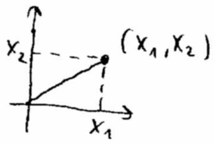
$d \to d+1$: 

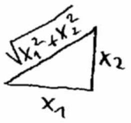
pl.: 

Euklédesz:

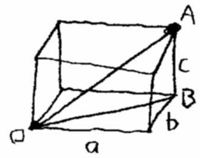
Pitagórasz tétel: 1d: 

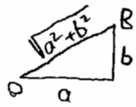
$|(x_1)| = |x_1| = \sqrt{x_1^2}$ — vektor hossza, abszolút érték

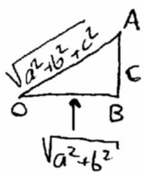
2d: 



$$|(x_1, x_2)| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

3d: 





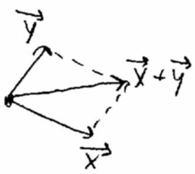
$$|\overline{OA}| = \sqrt{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 + c^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

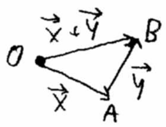
$$|(x_1, x_2, x_3)| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \left(\sum_{i=1}^{3} x_i^2\right)^{1/2}$$

d dim: $|\vec{x}| = |(x_1, x_2 \ldots x_d)| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2} = \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2\right)^{1/2}$

tulajdonságok: $|\vec{x}| = 0 \iff \vec{x} = (0, \ldots, 0)$

háromszög egyenlőtlenség: $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$



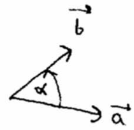


$$|\overline{OB}| \leq |\overline{OA}| + |\overline{AB}|$$

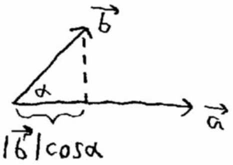
$$|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$$

Skalárszorzat.

$\vec{a}\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{b} = (\vec{a},\vec{b}) \qquad V\times V \to \mathbb{R}$



Geometriai definició: $(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$



Tulajdonságok:

① Ha $|\vec{a}| \neq 0 \neq |\vec{b}|$, akkor $\vec{a} \perp \vec{b} \iff (\vec{a},\vec{b}) = 0$

② Szimmetrikus: $(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a})$

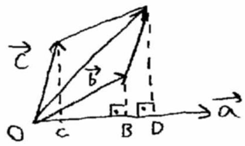
③ Lineáris a második változóban

$$(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a},\vec{b}) + (\vec{a},\vec{c}), \quad (\vec{a},\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a},\vec{b})$$

② és ③ $\Rightarrow$ linearitás az első változóban,
tehát a skalárszorzat bilineáris.

④ pozitív definit: $(\vec{a},\vec{a}) \geq 0, \quad (\vec{a},\vec{a}) = 0 \iff \vec{a} = \vec{0} \quad , (\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2$

Linearitás geometriai bizonyítása:

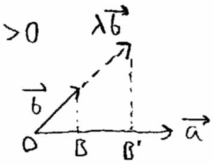


$|\overline{OC}| = |\overline{BD}|$

$|\overline{OD}| = |\overline{OB}| + |\overline{BD}|$
$= |\overline{OB}| + |\overline{OC}|$

$(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|\cdot|\overline{OD}| = |\vec{a}|\cdot|\overline{OB}| + |\vec{a}|\cdot|\overline{OC}| =$
$= (\vec{a},\vec{b}) + (\vec{a},\vec{c})$

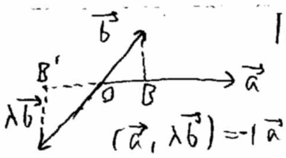
$\lambda > 0$



$|\overline{OB'}| = \lambda|\overline{OB}|$

$(\vec{a},\lambda\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\overline{OB'}| =$
$= |\vec{a}|\cdot\lambda|\overline{OB}| = \lambda(\vec{a},\vec{b})$

$\lambda < 0$



$|\overline{OB'}| = \underbrace{|\lambda|}_{=-\lambda}\cdot|\overline{OB}|$

$(\vec{a},\lambda\vec{b}) = -|\vec{a}|\cdot|\overline{OB'}| =$
$= -|\vec{a}|\cdot|\overline{OB}|\cdot(-\lambda) = \lambda(\vec{a},\vec{b})$

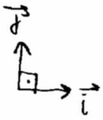
Ortonormált bázis:

Bázis definíciója: ① Vektorok halmaza, amelyek lineáris kombinációjaként bármely vektor egyértelműen kifejezhető

② lineárisan független vektorok maximális halmaza

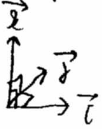
ortonormált bázis: egységhosszú, egymásra merőleges vektorokból álló bázis.

2d:



$|\vec{i}| = 1 = (\vec{i},\vec{i})$
$|\vec{j}| = 1 = (\vec{j},\vec{j})$
$(\vec{i},\vec{j}) = (\vec{j},\vec{i}) = 0$

3d:



$$\begin{array}{c|ccc|} & \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \hline \vec{i} & 1 & 0 & 0 \\ \vec{j} & 0 & 1 & 0 \\ \vec{k} & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad (\vec{i},\vec{k})$$

d dim: $\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_d$

Kronecker delta szimbólum

$$(\vec{e}_i,\vec{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

Skalár szorzat algebrai kiszámítása:

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} = (2,3), \quad \vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} = (4,5)$$

$$(\vec{a},\vec{b}) = (2\vec{i}+3\vec{j}, 4\vec{i}+5\vec{j}) = (2\vec{i}+3\vec{j}, 4\vec{i}) + (2\vec{i}+3\vec{j}, 5\vec{j}) =$$

$$= (2\vec{i}, 4\vec{i}) + (3\vec{j}, 4\vec{i}) + (2\vec{i}, 5\vec{j}) + (3\vec{j}, 5\vec{j}) =$$

$$= 2\cdot 4\underbrace{(\vec{i},\vec{i})}_{1} + 3\cdot 4\underbrace{(\vec{j},\vec{i})}_{0} + 2\cdot 5\underbrace{(\vec{i},\vec{j})}_{0} + 3\cdot 5\underbrace{(\vec{j},\vec{j})}_{1} = 2\cdot 4 + 3\cdot 5$$

$$\big((a_1,a_2),(b_1,b_2)\big) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{d} a_i \vec{e}_i, \sum_{j=1}^{d} b_j \vec{e}_j\right) = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} a_i b_j (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} a_i b_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{d} a_i b_i$$

Cauchy–Bunyakovszkij tétele: $|(\vec{a},\vec{b})| \leq |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

Biz.: $0 \leq (\vec{a}+\lambda\vec{b}, \vec{a}+\lambda\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 2\lambda(\vec{a},\vec{b}) + \lambda^2|\vec{b}|^2$

Tehát a $p(\lambda) = |\vec{b}|^2\cdot\lambda^2 + 2(\vec{a},\vec{b})\lambda + |\vec{a}|^2$ polinommak max. 1 valós gyöke van:

polinom diszkriminánsa $[2(\vec{a},\vec{b})]^2 - 4\cdot|\vec{b}|^2\cdot|\vec{a}|^2 \leq 0 \implies |(\vec{a},\vec{b})| \leq |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

Háromszög egyenlőtlenség bizonyítása:

$$|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

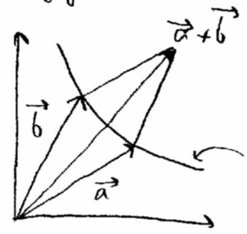
Cauchy–Bunyakovszkij

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2(\vec{a},\vec{b}) \leq |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| = (|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2$$

Háromszög egyenlőtlenség $\iff$ egység gömb konvex

pl. $\|\ \|_1, \|\ \|_\infty, |\ |$, ◇ ⊡ ⊙ egységgömbök

egységgömb nem konvex $\longrightarrow$ Δ egyenlőtlenség megbukhat:



itt $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$
$|\vec{a}+\vec{b}| > 2$

$|\vec{V}| = 1$ egységgömb

Skalárszorzat nemortogonális bázisban:

Legyen $f_1 \dots f_d$ bázis, $(f_i, f_j) = g_{ij}$, $\vec{x} = x_1\vec{f}_1 + \dots + x_d\vec{f}_d = \sum_{i=1}^{d} x_i \vec{f}_i$

Ekkor $|\vec{x}|^2 = (\vec{x},\vec{x}) = \left(\sum_{i=1}^{d} x_i\vec{f}_i, \sum_{j=1}^{d} x_j\vec{f}_j\right) = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} x_i x_j (\vec{f}_i, \vec{f}_j)$

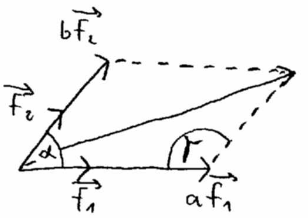
$$= \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} x_i g_{ij} x_j =$$

$$= (x_1 \dots x_d)\begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{d1} & \cdots & g_{dd} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix} = \vec{x}^T g \vec{x}$$

metrikus tenzor

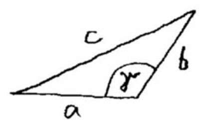
Koszinusz tétel: $|\vec{f_1}| = |\vec{f_2}| = 1$, $(f_1, f_2) = \cos\alpha$.

$$|a\vec{f_1} + b\vec{f_2}|^2 = (a\vec{f_1} + b\vec{f_2}, a\vec{f_1} + b\vec{f_2}) = a^2|\vec{f_1}|^2 + b^2|\vec{f_2}|^2 + 2ab(\vec{f_1}, \vec{f_2})$$
$$= a^2 + b^2 + 2\cos\alpha \cdot ab$$



$\gamma = 180^\circ - \alpha$

$\cos\alpha = -\cos\gamma$



$$c^2 = a^2 + b^2 + 2\cos\alpha \cdot ab$$
$$= a^2 + b^2 - 2\cos\gamma \cdot ab$$

Skalárszorzat alkalmazásai:

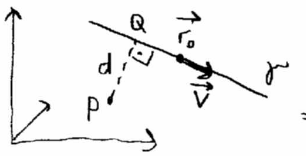
1. $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (3,0,1)$. Mennyi az $\vec{a}, \vec{b}$ által bezárt szög koszinusza?

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha \implies \cos\alpha = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{([1,2,3], (3,0,1))}{\sqrt{1^2+2^2+3^2} \cdot \sqrt{3^2+0^2+1^2}} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{10}}$$

2. $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (3, x, 1)$. Mennyi x, ha $\vec{a} \perp \vec{b}$?

$$\vec{a} \perp \vec{b} \implies (\vec{a}, \vec{b}) = 0 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot x + 3 \cdot 1 \implies x = -\frac{6}{2} = -3$$

3. Legyen $\vec{\gamma}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\vec{\gamma}(t) = \vec{r_0} + t \cdot \vec{v} = (1,2,3) + t \cdot (4,5,6)$ egy egyenes parametrizált megadása, továbbá legyen $P = (7,8,9)$. Hol van az egyenesen a P-hez legközelebbi pont? Mennyi az egyenes és P távolsága?



$$\vec{PQ} \perp \vec{v} \implies (\vec{PQ}, \vec{v}) = 0 =$$
$$= \Big((1+4t, 2+5t, 3+6t) - (7,8,9), (4,5,6) \Big) =$$
$$= \Big((4t-6, 5t-6, 6t-6), (4,5,6) \Big) = 77t - 90 = 0 \implies t = \frac{90}{77}$$

$$Q = \vec{\gamma}\left(\frac{90}{77}\right) = \left(1 + 4 \cdot \frac{90}{77}, 2 + 5 \cdot \frac{90}{77}, 3 + 6 \cdot \frac{90}{77}\right).$$ Az egyenes – P távolság $|\vec{PQ}|$.

Megjegyzés: Ez egy optimalizációs feladat:

$$M(t) = |\vec{\gamma}(t) - P| = \left([(1+4t) - 7]^2 + [(2+5t) - 8]^2 + [(3+6t) - 9]^2 \right)^{1/2}$$

Mennyi t, $\vec{\gamma}(t)$, ha $M(t)$ minimális?

Ezzel ekvivalens $\tilde{M}(t) = M^2(t) = [(1+4t)-7]^2 + [(2+5t)-8]^2 + [(3+6t)-9]^2$ minimalizálása.

3.* Elforgatás (ortogonális transzformáció).

Legyen $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ és $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ két ortonormált bázis. Ha

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_e = y_1\vec{n}_1 + y_2\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_n,$$

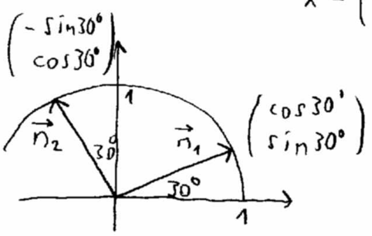
akkor hogyan számoljuk ki y_i-t x_i-ből?

$$(\vec{n}_1, \vec{x}) = (\vec{n}_1, y_1\vec{n}_1 + y_2\vec{n}_2) = y_1\underbrace{(\vec{n}_1, \vec{n}_1)}_{=1} + y_2\underbrace{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}_{=0} = y_1$$

$$(\vec{n}_2, \vec{x}) = (\vec{n}_2, y_1\vec{n}_1 + y_2\vec{n}_2) = y_1\underbrace{(\vec{n}_2, \vec{n}_1)}_{=0} + y_2\underbrace{(\vec{n}_2, \vec{n}_2)}_{=1} = y_2$$

Példa:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3\cdot\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 = 3\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = y_1\begin{pmatrix} \cos 30^\circ \\ \sin 30^\circ \end{pmatrix} + y_2\begin{pmatrix} -\sin 30^\circ \\ \cos 30^\circ \end{pmatrix}$$
$$= y_1\vec{n}_1 + \vec{y}_2\vec{n}_2$$



$$y_1 = (n_1, \vec{x}) = \left(\begin{pmatrix} \cos 30^\circ \\ \sin 30^\circ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = (\cos 30^\circ, \sin 30^\circ)\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$y_2 = (n_2, \vec{x}) = \left(\begin{pmatrix} -\sin 30^\circ \\ \cos 30^\circ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = (-\sin 30^\circ, \cos 30^\circ)\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

vagyis

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_n = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix}}_{n \text{ koord.} \longleftarrow e \text{ koord. rendszer}}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot 4 \\ -\frac{1}{2}\cdot 3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4 \end{pmatrix}_n$$

Ha adott $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_n = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, akkor

$$5\cdot\vec{n}_1 + 6\cdot\vec{n}_2 = 5\cdot\begin{pmatrix} \cos 30^\circ \\ \sin 30^\circ \end{pmatrix} + 6\cdot\begin{pmatrix} -\sin 30^\circ \\ \cos 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

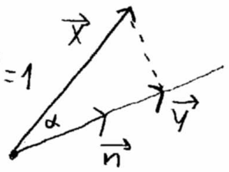
$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 6\cdot\frac{1}{2} \\ 5\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 6 \end{pmatrix}$$

Tehát az $n \leftarrow e$ és $e \leftarrow n$ koord. transzformációk:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_n = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix}^T}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_e \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_e = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} | & | \\ \vec{n}_1 & \vec{n}_2 \\ | & | \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_n$$

(4) Merőleges vetítés, 2d

$|\vec{n}|=1$



$$\vec{y}=\left(|\vec{x}|\cdot\cos\alpha\right)\cdot\vec{n}=(\vec{n},\vec{x})\cdot\vec{n}=\vec{n}\cdot(\vec{n}^T\vec{x})$$

Példa: $\vec{n}=\begin{pmatrix}n_1\\n_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\\sqrt{3}/2\end{pmatrix}$, $\quad\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$

$$\vec{y}=\left(\begin{bmatrix}1/2\\\sqrt{3}/2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}1/2\\\sqrt{3}/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\\sqrt{3}/2\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1/2\\\sqrt{3}/2\end{pmatrix}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\cdot5+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot7\right)$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/4 & \sqrt{3}/4\\ \sqrt{3}/4 & 3/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/4+7\sqrt{3}/4\\ 5\sqrt{3}/4+7\cdot3/4\end{pmatrix}$$

Tehát $\vec{y}=\vec{n}\cdot(\vec{n}^T\vec{x})=P\vec{x}$, ahol $P=\vec{n}\,\vec{n}^T=\begin{pmatrix}n_1\\n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & n_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n_1\cdot n_1 & n_1\cdot n_2\\ n_2\cdot n_1 & n_2\cdot n_2\end{pmatrix}$

"sor-oszlop" szorzás
sor, oszlop méret $=1$

(5) Merőleges vetítés, 3d

$\vec{n}=\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\qquad\vec{y}=\vec{n}\cdot(\vec{n}^T\vec{x})=\underset{\text{projekció}}{P}\,\vec{x}\qquad(\text{itt } |\vec{n}|=1)$

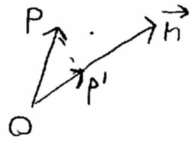
komponens alak: $\displaystyle y_i=n_i\cdot\sum_{k=1}^{3}n_k x_k=\sum_{k=1}^{3}(n_i n_k)\cdot x_k=\sum_{k=1}^{3}P_{ik}\cdot x_k$

$$P_{ik}=n_i n_k$$

Példa: $\vec{n}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2\\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2\\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\\ \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8}\\ \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8}\end{pmatrix}$$

(5') Merőleges vetítés, 3d, $\vec{n}$ nem egységvektor



$\vec{n}=(1,2,3)$, $\quad P=(4,5,6)$

$$\overrightarrow{OP'}=\left(\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|},\overrightarrow{OP}\right)\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{1}{|\vec{n}|^2}(\vec{n},\overrightarrow{OP})\cdot\vec{n}=$$

$$=\frac{1}{1^2+2^2+3^2}\cdot\Big((1,2,3),(4,5,6)\Big)\cdot(1,2,3)=\frac{32}{14}\cdot(1,2,3)$$

⑥ Merőleges vetítés síkra, 3d.

$\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ ortogonális bázis.

$$\vec{x} = x_1\vec{n}_1 + x_2\vec{n}_2 + x_3\vec{n}_3 = (\vec{n}_1, x)\cdot\vec{n}_1 + (\vec{n}_2, \vec{x})\vec{n}_2 + (\vec{n}_3, \vec{x})\cdot\vec{n}_3$$

Mi $\vec{x}$ $\perp$ vetülete az $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ vektorokat tartalmazó síkra?

$\perp$ vetület $\vec{n}_1$-re: $P_1\vec{x} = (\vec{n}_1, x)\vec{n}_1$

$\perp$ vetület $\vec{n}_2$-re: $P_2\vec{x} = (\vec{n}_2, x)\cdot\vec{n}_2$

$\perp$ vetület $\vec{n}_{1,2}$ síkra: $P\vec{x} = (\vec{n}_1, x)\cdot\vec{n}_1 + (\vec{n}_2, x)\cdot\vec{n}_2 = \left[\vec{n}_1\vec{n}_1^T + \vec{n}_2\vec{n}_2^T\right]\vec{x}$

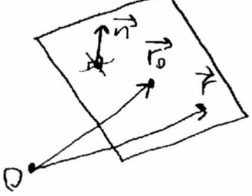
Példa: $\vec{n}_1 = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{bmatrix}$, $\vec{n}_2 = \begin{bmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{bmatrix}$

$$P = \vec{n}_1\vec{n}_1^T + \vec{n}_2\vec{n}_2^T = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4/5 & 0 & 3/5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9/25 & 0 & 12/25 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12/25 & 0 & 16/25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16/25 & 0 & -12/25 \\ 0 & 0 & 0 \\ -12/25 & 0 & 9/25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tehát pl. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ merőleges vetülete $P\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

⑦ Sík egyenlete: adott $\vec{n}$, a síkra merőleges vektor, $\vec{r}_0$ pedig a sík egy pontja.



$$\vec{n} \perp (\vec{r} - \vec{r}_0) \iff (\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0 = \vec{n}(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

Példa: $\vec{n} = (2, 3, 4)$, $\vec{r}_0 = (5, 6, 7)$

$$\vec{n}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

$$(2, 3, 4)\cdot\left[(x, y, z) - (5, 6, 7)\right] = 0$$

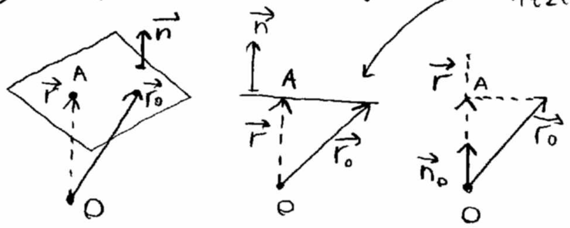
$$(2, 3, 4)\cdot(x-5, y-6, z-7) = 0$$

$$2(x-5) + 3(y-6) + 4(z-7) = 0$$

$$2x + 3y + 4z = 2\cdot5 + 3\cdot6 + 4\cdot7 = 56$$

8) Origó–sík távolság

sík oldalnézete



egységvektor

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

$$\vec{r} = (\vec{n}_0, \vec{r}_0)\cdot\vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|^2}\cdot(\vec{n},\vec{r}_0)\vec{n}$$

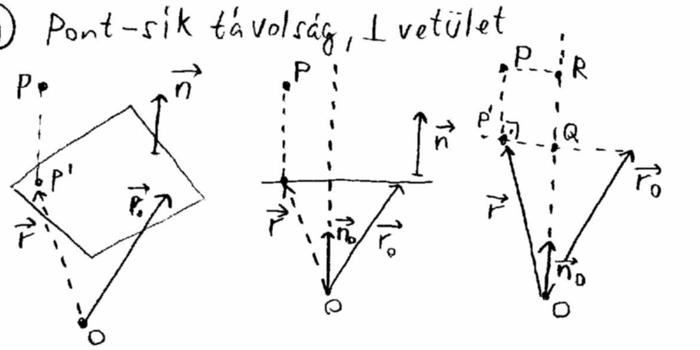
$$|\overline{OA}| = |\vec{r}| = (\vec{n}_0, \vec{r}_0) = \frac{1}{|\vec{n}|}(\vec{n},\vec{r}_0)$$

Példa: $\vec{n} = (1,2,3)$; $\vec{r}_0 = (4,5,6)$

$$\vec{r} = \frac{1}{1^2+2^2+3^2}\cdot\Big((1,2,3),(4,5,6)\Big)\cdot(1,2,3) = \frac{1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6}{1^2+2^2+3^2}\cdot(1,2,3) = \frac{32}{14}\cdot(1,2,3)$$

$$|\overline{OA}| = |\vec{r}| = \frac{1}{\sqrt{14}}\Big((1,2,3),(4,5,6)\Big) = \frac{32}{\sqrt{14}}$$

9) Pont–sík távolság, ⊥ vetület



$$\overrightarrow{OR} = (\vec{n}_0, \overrightarrow{OP})\cdot\vec{n}_0$$

$$\overrightarrow{OQ} = (\vec{n}_0, \vec{r}_0)\cdot\vec{n}_0$$

$$\overrightarrow{P'P} = \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} =$$

$$= (\vec{n}_0, \overrightarrow{OP})\cdot\vec{n}_0 - (\vec{n}_0, \vec{r}_0)\cdot\vec{n}_0$$

$$= (\vec{n}_0, \overrightarrow{OP} - \vec{r}_0)\cdot\vec{n}_0$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{P'P}$$

Példa: $\vec{n} = (1,2,3)$, $\vec{r}_0 = (4,5,6)$, $P = (7,8,9)$

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}\cdot(1,2,3) = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$$

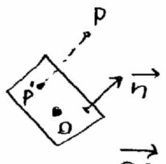
$$\overrightarrow{P'P} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3),\ (7,8,9)-(4,5,6)\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3) = \frac{1}{14}\Big(1\cdot3+2\cdot3+3\cdot3\Big)\cdot(1,2,3)$$

$$= \frac{18}{14}\cdot(1,2,3)$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP'} = (7,8,9) - \frac{18}{14}\cdot(1,2,3)$$

$$\text{pont–sík távolság} = |\overrightarrow{P'P}| = \left|\frac{18}{14}\cdot(1,2,3)\right| = \frac{18}{14}\sqrt{1^2+2^2+3^2} = \frac{18}{\sqrt{14}}$$

10) ⊥ vetület origót tartalmazó síkra



$\vec{n}_0 = \dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$, legyen $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ síkbeli ortonormált vektorok, tehát $\vec{n}_0, \vec{n}_1, \vec{n}_2$ ortonormált bázis.

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = (\vec{n}_0,\vec{r})\cdot\vec{n}_0 + (\vec{n}_1,\vec{r})\cdot\vec{n}_1 + (\vec{n}_2,\vec{r})\cdot\vec{n}_2$$

$$\overrightarrow{OP'} = \vec{r}\,' = (\vec{n}_1,\vec{r})\cdot\vec{n}_1 + (\vec{n}_2,\vec{r})\cdot\vec{n}_2 = \vec{r} - (\vec{n}_0,\vec{r})\cdot\vec{n}_0 = \boxed{1\cdot\vec{r} - \vec{n}_0\vec{n}_0^{\,T}\vec{r}}$$

ha oszlopvektorokat használnánk

$$\boxed{= (E - \vec{n}_0\vec{n}_0^{\,T})\vec{r} = P_{\vec{n}}\vec{r}}$$

projekció mátrixa

(10. folyt.) Példa: $\vec{n} = (1,2,3)$, $P = (4,6,8)$.

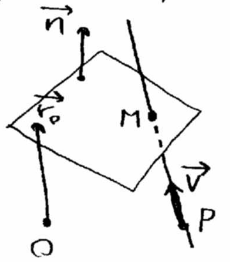
$$\vec{n}_0 = \frac{(1,2,3)}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$$

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} - (\vec{n}_0, \overrightarrow{OP})\vec{n}_0 = (4,6,8) - \left(\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3), (4,6,8)\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$$

$$= (4,6,8) - \frac{1}{14}(1\cdot 4 + 2\cdot 6 + 3\cdot 8)\cdot(1,2,3)$$

$$= (4,6,8) - \frac{40}{14}(1,2,3)$$

(11) Sík-egyenes metszéspontja



példa: $\vec{n} = (1,2,3)$, $\vec{r}_0 = (3,4,5)$ sík

$P = (2,4,7)$, $\vec{v} = (1,1,2)$ egyenes

egyenes parametrikus egyenlete:

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP} + t\cdot\vec{v} = (2,4,7) + t\cdot(1,1,2) = (2+1\cdot t, 4+1\cdot t, 7+2\cdot t)$$

sík normál egyenlete

$$\vec{n}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

$$(1,2,3)\cdot\left[(x,y,z) - (3,4,5)\right] = 0$$

$$1\cdot(x-3) + 2\cdot(y-4) + 3\cdot(z-5) = 0$$

$$1x + 2y + 3z - 31 = 0$$

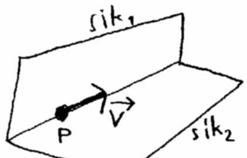
Metszéspont:

$$1\cdot(2+1\cdot t) + 2\cdot(4+1\cdot t) + 3(7+2\cdot t) - 31 = 0$$

$$8t + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0$$

$$M = \overrightarrow{OM} = \vec{r}(0) = (2+1\cdot 0, 4+1\cdot 0, 7+2\cdot 0) = (2,4,7)$$

12 Két sík metszetének parametrikus egyenlete



$$\text{sík}_1:\quad -6x+y+z=8$$
$$\text{sík}_2:\quad -2x+3y-z=4$$

$$\begin{matrix} -2x+3y-z=4 \\ -6x+y+z=8 \end{matrix} \xrightarrow{II \to II-3\cdot I} \begin{matrix} -2x+3y-z=4 \\ -8y+4z=-4 \end{matrix} \longrightarrow z=-1+2y \Big\} \begin{matrix} -2x+3y-(-1+2y)=4 \\ \hookrightarrow x=\frac{1}{2}y-\frac{3}{2} \end{matrix}$$

Tehát az $\left(\frac{1}{2}y-\frac{3}{2},\ y,\ -1+2y\right)$ pontok az egyenes $=\text{sík}_1 \cap \text{sík}_2$ halmazban vannak.

Parametrikus egyenlet: $\quad (y=t)$

$$\vec{r}(t)=\left(\frac{1}{2}t-\frac{3}{2},\ t,\ -1+2t\right)=\left(-\frac{3}{2},0,-1\right)+t\left(\frac{1}{2},1,2\right)$$

A megoldás nem egyértelmű, P akárhol választható az egyenesen, $\vec{V}$ megszorozható bármely nem nulla számmal, söt $\vec{r}(f(t))$ is megoldás, ha f^{-1} létezik és $R_f=\mathbb{R}$.

Megjegyzés: Gauss-elimináció táblázatos formában:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -1 & 4 \\ -6 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{II\to II-3\cdot I} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -8 & 4 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[II\to \frac{1}{-8}\cdot II]{I\to\frac{1}{-2}\cdot I} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 1/2 & -2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right] \xrightarrow{I\to I+\frac{3}{2}II} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/4 & -5/4 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right]$$

Hogyan olvassuk ki ebből $\vec{r}(t)$-t?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5/4 \\ 1/2 \end{bmatrix},\quad \text{ha } z=0, \text{ akkor } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5/4 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

tehát legyen $\vec{r}_0=\begin{bmatrix} -5/4 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Ha $z=-1$, akkor $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/4 \\ -1/2 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

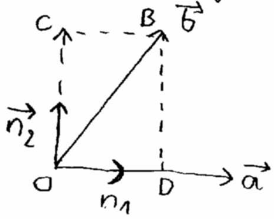
tehát $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5/4+t\cdot(-1/4) \\ 1/2+t\cdot(-1/2) \\ 0+t\cdot(-1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5/4 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$

Így $\vec{r}(t)$ oszlopvektorként: $\quad \vec{r}(t)=\begin{bmatrix} -5/4 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} -1/4 \\ -1/2 \\ -1 \end{bmatrix}.$

Tehát $\left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & \boxed{-1/4} & \boxed{-5/4} \\ 0 & 1 & \boxed{-1/2} & \boxed{1/2} \end{array}\right] \longrightarrow \vec{r}(t)=\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -5/4 \\ 1/2 \end{matrix}} \\ 0 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1/4 \\ -1/2 \end{matrix}} \\ -1 \end{bmatrix}$

(13) Ortonormált vektorrendszer konstrukciója (Gram–Schmidt)

Legyen $\vec{a}=(1,0,-1)$, $\vec{b}=(1,2,3)$, $\vec{r}(s,t)=s\cdot\vec{a}+t\cdot\vec{b}$ egy origót tartalmazó sík paraméteres egyenlete. Keress két, egymásra merőleges egységvektort a síkban!



$$\vec{n}_1=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}\cdot(1,0,-1)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\overrightarrow{OD}=(\vec{n}_1,\vec{b})\vec{n}_1,\quad \overrightarrow{OC}=\vec{b}-(\vec{n}_1,\vec{b})\vec{n}_1,\quad \vec{n}_2=\frac{\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|}$$

$$\overrightarrow{OD}=\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),(1,2,3)\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot1+0\cdot2+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot3\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=(-1,0,1)$$

$$\overrightarrow{OC}=(1,2,3)-(-1,0,1)=(2,2,2)$$

$$\vec{n}_2=\frac{\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|}=\frac{1}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}}(2,2,2)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

(13 b) Keresd meg az $\{\vec{r}(s,t)=s\vec{a}+t\vec{b}\mid s,t\in\mathbb{R}\}$ síkra való $\perp$ vetítés mátrixát!

Ha $\vec{n}_1,\vec{n}_2$ síkbeli ortonormált rendszer, akkor $\vec{x}$ merőleges vetülete:

$$P:\ \vec{x}\longrightarrow(\vec{n}_1,\vec{x})\cdot\vec{n}_1+(\vec{n}_2,\vec{x})\cdot\vec{n}_2=\vec{n}_1\vec{n}_1^T\vec{x}+\vec{n}_2\vec{n}_2^T\vec{x}=(\vec{n}_1\vec{n}_1^T+\vec{n}_2\vec{n}_2^T)\vec{x}$$

Esetünkben

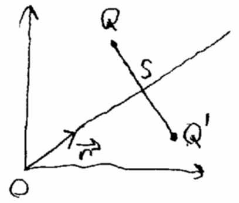
$$\vec{n}_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\qquad \vec{n}_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_1\vec{n}_1^T=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & -1/2\\0&0&0\\-1/2&0&1/2\end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_2\vec{n}_2^T=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3&1/3&1/3\\1/3&1/3&1/3\\1/3&1/3&1/3\end{pmatrix}$$

$$P=\vec{n}_1\vec{n}_1^T+\vec{n}_2\vec{n}_2^T=\begin{pmatrix}1/2&0&-1/2\\0&0&0\\-1/2&0&1/2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1/3&1/3&1/3\\1/3&1/3&1/3\\1/3&1/3&1/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/6&1/3&-1/6\\1/3&1/3&1/3\\-1/6&1/3&5/6\end{pmatrix}$$

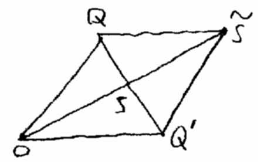
(14) Keresd meg a $Q=(7,9)$ pontnak az origón átmenő, $\vec{n}=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ irányvektorú egyenesre való $\perp$ tükrözöttjét!



$$|\vec{n}|=\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=1$$

$$\overrightarrow{OS}=(\vec{n},\overrightarrow{OQ})\,\vec{n},\quad \overrightarrow{SQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OS},$$

$$\overrightarrow{OQ'}=\overrightarrow{OQ}-2\overrightarrow{SQ}=2\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OQ}=\underbrace{2(\vec{n},\overrightarrow{OQ})\vec{n}}_{\overrightarrow{O\tilde{S}}}\underbrace{-\overrightarrow{OQ}}_{\overrightarrow{\tilde{S}Q'}}$$



$$\overrightarrow{OQ'}=2\left(\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right),(7,9)\right)\cdot\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)-(7,9)=$$

$$=\frac{2\cdot 57}{25}\cdot(3,4)-(7,9)=\left(\frac{167}{25},\frac{231}{25}\right)$$

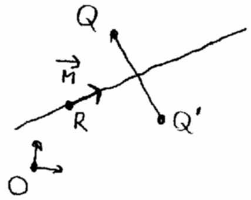
(14.b) Írd fel a T tükrözés mátrixát!

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=2\cdot\left(\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}3/5\\4/5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=2\cdot\begin{bmatrix}3/5\\4/5\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}3/5 & 4/5\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

$$=\left\{2\cdot\begin{bmatrix}9/25 & 12/25\\12/25 & 16/25\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7/25 & 24/25\\24/25 & 7/25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

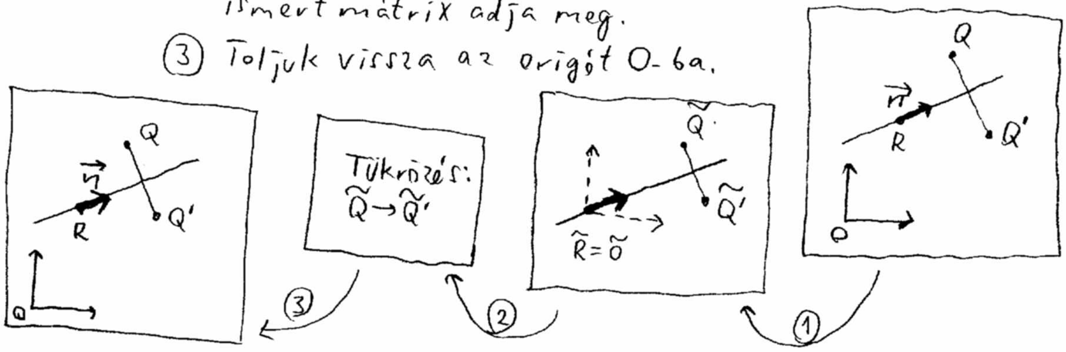
Tehát $T=\begin{bmatrix}-7/25 & 24/25\\24/25 & 7/25\end{bmatrix}$. Továbbá $T^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

(15) Keresd meg a $Q=\begin{pmatrix}7\\9\end{pmatrix}$ pontnak az $4x-3y=5$ egyenesre való $\perp$ tükrözöttjét!



A (14.6) példa megadja a tükrözés mátrixát, ha az O origó az egyenesen van. Tehát:

1. Toljuk az origót R-be.
2. Ekkor az origó az egyenesen lesz, így a tükrözést egy már ismert mátrix adja meg.
3. Toljuk vissza az origót O-ba.



A $\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ vektor $\perp$ az egyenesre, így az egyenes egységnyi irányvektora $\vec{n}=\begin{pmatrix}3/5\\4/5\end{pmatrix}$ (vagy $\begin{pmatrix}-3/5\\-4/5\end{pmatrix}$). Az egyenes egy pontja pl. $R=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

1. Eltolás $\overrightarrow{RO}$-val: $Q=\begin{pmatrix}7\\9\end{pmatrix}\longrightarrow\tilde{Q}=\begin{pmatrix}7\\9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}$
2. Tükrözés az egyenesre: $\tilde{Q}=\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}\longrightarrow\tilde{Q}'=\begin{bmatrix}-7/25&24/25\\24/25&7/25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}157/25\\176/25\end{bmatrix}$
3. Eltolás $\overrightarrow{OR}$-rel: $\tilde{Q}'=\begin{bmatrix}157/25\\176/25\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}157/25\\176/25\end{bmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}207/25\\201/25\end{bmatrix}=Q'$

Tehát a megoldás

$$Q'=\begin{bmatrix}207/25\\201/25\end{bmatrix}\xleftarrow{③}\begin{bmatrix}157/25\\176/25\end{bmatrix}\xleftarrow{②}\begin{bmatrix}5\\8\end{bmatrix}\xleftarrow{①}\begin{bmatrix}7\\9\end{bmatrix}$$

Ugyanez homogén koordinátákkal, mátrixszorzással:

$$\xleftarrow{③}\overbrace{\begin{bmatrix}-7/25&24/25&0\\24/25&7/25&0\\0&0&1\end{bmatrix}}^{\text{tükrözés}}\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\9\\1\end{bmatrix}\xleftarrow{②}\overbrace{\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}}^{\text{eltolás}}\begin{bmatrix}7\\9\\1\end{bmatrix}\xleftarrow{①}\begin{bmatrix}7\\9\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}207/25\\201/25\\1\end{bmatrix}=\underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}}^{\text{visszatolás}}\begin{bmatrix}-7/25&24/25&0\\24/25&7/25&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}}_{\text{A transzformáió mátrixa}}\begin{bmatrix}7\\9\\1\end{bmatrix}\xleftarrow{③}$$