

Differencialegyenletek, ProbaZH 1

a, b csoportok

1. a) $y' = y^3$, $y(0) = 1$. Mennyi y ? Milyen tartományon értelmezett a megoldás? Mi a DE fixpontja és milyen annak a stabilitása?

b) $y' = \sqrt{y}$, $y(0) = 0$, $y \geq 0$. Keresd meg a DE összes megoldását! Magyarázd meg, miért nem egyértelmű a megoldás!

2. a) Írd át a következő DE-et időfüggetlen DE rendszerre!

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(x)y_1 + y_2 \\ y_1/y_2 + x + 1 \end{pmatrix}$$

b) Írd át a következő egyenletet elsőrendű DE rendszerre!

$$y'' = -y' - 2y$$

3. a) Alkalmazd az Euler, illetve a Heun módszert a következő DE-re $\Delta x = 0.01$ lépésközzel az $y(3) = 5$ kezdeti feltétel mellett! Mennyi lesz ezen módszerek becslése szerint $y(3.01)$?

$$y' = f(x, y) = x^2 - xy;$$

b)

$$y' = f(x, y) = x^2 - xy;$$

Mennyi y'' ? Írd fel y másodrendű Taylor polinomját az $x = 3$ pont körül, ha $y(3) = 5$!

4. a)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{y_2} - 1 \\ (y_2 - 3)(y_1 - 2) \end{pmatrix}$$

Keresd meg a DE fixpontját és vizsgáld meg a stabilitását! Írd fel a fixpont körüli linearizált közelítő DE-t!

b)

$$y' = y^3 - 4y.$$

Keresd meg a DE fixpontját és vizsgáld meg a stabilitását! Írd fel a fixpont körüli linearizált közelítő DE-t! Rajzold le a DE megoldás görbeit!

5. a)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + 4y_2 \\ 4y_1 + y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Keresd meg A sajátértékeit és sajátvektorait!
- Írd fel a DE általános megoldását!
- Számold ki a DE partikuláris megoldását!
- Írd fel, hogy milyen összefüggés van a A és a sajátértékeket tartalmazó diagonális D matrixok között!
- Mennyi e^{xA} ? (Elegendő az, hogy kifejezed az eredményt D , illetve egy S matrix és annak inverze szorzataként!)
- Írd fel a partikuláris megoldást e^{xA} segítségével!
- Mi a DE fixpontja? Milyen a fixpont stabilitása?

b) Valaszolj a fentebbi kérdésekre a

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + 4y_2 \\ -4y_1 + y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

DE esetében!