1 1

- $y'' - 3y' + 2y = 0, \;\; y(0) = 4, \; y'(0) = 5$. Mennyi $y(1)$?
- $y'' - 4y' + 4y = 0, \;\; y(0) = 4, \; y'(0) = 5$. Mennyi $y(1)$?
- $y'' - 2y' + 5y = 0, \;\; y(0) = 1, \; y'(0) = 2$. Mennyi $y(1)$?
- $y' = -(y+2)(y-3), \;\; y(0) = 2$. Mennyi $\lim_{x\to\infty} y(x)$?
- $$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
  Mennyi $y_1(1)$?
- $$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$
  Mennyi $y_1(1)$?
- $$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 34 \end{pmatrix}.$$
  Mennyi $y_1(1)$?
- Ird fel a linearizalt differencialegyenleteket a fixpontok korul! Vizsgald meg a fixpontok stabilitasat!
  1. $y' = y^2 - 4$,

1.1 Megoldas

`diff.megoldas.1.pdf`

2 2

3a. (1+1+1+2 pont)

$y' = y(y-3)$.
Keresd meg a DE fixpontjait!
Ird fel a fixpontok koruli linearizalt kozelito DE-t!
Ha $y(0) = 2$, mennyi
$\lim_{x\to\infty} y(x) =$ $\qquad\qquad$ $\lim_{x\to-\infty} y(x) =$

Vazold a DE-nek az $y(0) = -1, 0, 1, 2, 3, 4$ kezdeti felteteleket kielegito megoldasait!

2. (5+2+3 pont)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 \\ 3y_1 + 4y_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Keresd meg A sajatertekeit es sajatvektorait!
Ird fel a DE altalanos megoldasat!
Szamold ki a DE partikularis megoldasat!
(5×2 pont)
Ird fel, hogy milyen osszefugges van A es a sajatertekeket tartalmazo diagonalis D matrixok kozott!
Mennyi e^{xA}? (Elegendo az, hogy kifejezed az eredmenyt D, illetve egy S matrix es annak inverze szorzatakent!)
Ird fel a partikularis megoldast e^{xA} segitsegevel!
Mi a DE fixpontja? Milyen a fixpont stabilitasa?
Mennyi a megadott kezdofeltetel eseten $\lim_{x\to\infty} \bar{y}(x)$ es $\lim_{x\to-\infty} \bar{y}(x)$?

2. (5+2+3 pont)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 \\ 3y_1 + 4y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Keresd meg A sajatertekeit es sajatvektorait!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \; 1 \qquad \text{sajátértékek: } 0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} \; 1 \longrightarrow \lambda_1 = 2, \; \lambda_2 = 4 \; 1$$

sajátvektorok:

$$\lambda_1 = 2: \begin{pmatrix} 2-2 & 0 \\ 3 & 4-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot t, \quad \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \; 1$$

$$\lambda_2 = 4: \begin{pmatrix} 2-4 & 0 \\ 3 & 4-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; 1$$

$$\boxed{\lambda_1 = 2, \; \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}} \qquad \boxed{\lambda_2 = 4, \; \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Ird fel a DE altalanos megoldasat!

$$\bar{y}_{ált} = c_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + c_2 e^{4x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad 2$$

Szamold ki a DE partikularis megoldasat!

$$\bar{y}_{part}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{1}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow c_1 = \frac{1}{2}, \; c_2 = 4.5 \; 1$$

$$\bar{y}_{part}(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + 4.5 \, e^{4x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; 1$$

(5 × 2 pont)
Ird fel, hogy milyen osszefugges van A es a sajatertekeket tartalmazo diagonalis D matrixok kozott!

$$S^{-1}AS=D \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

vagy

$$SDS^{-1}=A \quad \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2$

2

az egyik is elég

Mennyi e^{xA}? (Elegendo az, hogy kifejezed az eredmenyt D, illetve egy S matrix es annak inverze szorzatakent!)

$$e^{xA}=e^{SxDS^{-1}}=Se^{xD}S^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{4x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

1 1

Ird fel a partikularis megoldast e^{xA} segitsegevel!

$$y_{part}=e^{xA}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad 2$$

Mi a DE fixpontja? Milyen a fixpont stabilitasa?

Fixpont: $\left.\begin{matrix} 2y_1=0 \\ 3y_1+4y_2=0 \end{matrix}\right\}$ $y_1=y_2=0$. Sajátértékek: $2>0$, $4>0$ $\rightarrow$ instabil fixpont

1 1

Mennyi a megadott kezdofeltetel eseten $\lim_{x\to\infty}\bar{y}(x)$ es $\lim_{x\to-\infty}\bar{y}(x)$?

$$\bar{y}_{part}(x)=\begin{pmatrix} e^{2x} \\ -\frac{3}{2}e^{2x}+4.5e^{4x} \end{pmatrix} \qquad \lim_{x\to\infty}\bar{y}_{part}=\begin{pmatrix} \infty \\ \infty \end{pmatrix} \quad 1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\bar{y}_{part}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 1$$

mivel $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ instabil fixpont

3a. (1+1+1+2 pont)
$y' = y(y-3)$.
Keresd meg a DE fixpontjait!

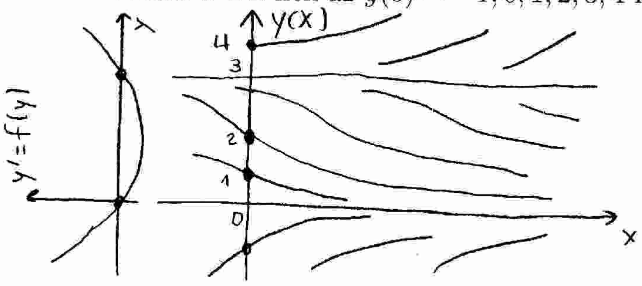
$f(y) = y(y-3) = 0 \longrightarrow y_1 = 0$ vagy $y_2 = 3$ 1

Ird fel a fixpontok koruli linearizalt kozelito DE-t!

$\frac{df}{dy} = f'(y) = 2y - 3$ | $f'(y_1) = 2\cdot 0 - 3 = -3$, $\frac{d}{dx}(y-0) = \frac{d}{dx}\Delta y = -3\Delta y$ | $f'(y_2) = 2\cdot 3 - 3 = 3$, $\frac{d}{dx}(y-3) = \frac{d}{dx}\Delta y = 3\Delta y$ 1

Ha $y(0) = 2$, mennyi
$\lim_{x\to\infty} y(x) =$ 0 $\lim_{x\to-\infty} y(x) =$ 3 1

Vazold a DE-nek az $y(0) = -1, 0, 1, 2, 3, 4$ kezdeti felteteleket kielegito megoldasait!



2

3b. (2+3 pont)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2^3 - 27 \\ (y_1^3 - 1)(y_2^3 - 8). \end{pmatrix}$$

Keresd meg a DE fixpontjat!

$$\left.\begin{array}{l} y_1' = y_2^3 - 27 = 0 \longrightarrow y_2 = 3 \\ y_2' = (y_1^3 - 1)(y_2^3 - 8) = 0 \end{array}\right\} (y_1^3 - 1)(3^3 - 8) = 0 \longrightarrow y_1 = 1$$

1

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{fix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$ 1

Ird fel a fixpont koruli linearizalt kozelito DE-t!

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1}(y_2^3 - 27) & \frac{\partial}{\partial y_2}(y_2^3 - 27) \\ \frac{\partial}{\partial y_1}(y_1^3-1)(y_2^3-8) & \frac{\partial}{\partial y_2}(y_1^3-1)(y_2^3-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3y_2^2 \\ 3y_1^2(y_2^3 - 8) & (y_1^3 - 1)\cdot 3y_2^2 \end{pmatrix}$$ 1

$$A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 3\cdot 3^2 \\ 3\cdot 1^2\cdot(3^3 - 8) & (1^2 - 1)\cdot 3\cdot 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 27 \\ 57 & 0 \end{pmatrix}$$ 1

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 - 1 \\ y_2 - 3 \end{pmatrix} = \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 27 \\ 57 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{pmatrix}$$ 1

3 3

1. Legyen $u = (1+2i, 3+4i)^T$, $v = (5+6i, 7+8i)^T$. Mennyi az (u, v) belso szorzat?
2. Legyen
$$A = \begin{pmatrix} i & 2-i \\ 3+4i & 1+i \end{pmatrix}.$$
Mennyi az adjungalt A^* matrix?
3. Legyen $A = A^*$. Mit mondhatunk A sajatertekeirol?
Legyen $A = -A^*$. Mit mondhatunk A sajatertekeirol?
4. Legyen $f_1 = (\cos 30°, \sin, 30°)^T$, $f_2 = (\cos 120°, \sin, 120°)^T$ egy ortonormalt bazis. Fejezd ki $v = (7, 8)^T$ vektort az f-ek linearis kombinaciojakent!
5. $y' = e^{x^2}$, $y(1) = 2$. Fejezd ki $y(7)$-et a hatarozott integralas segitsegevel!
6. $y'' = e^{x^2}$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 5$. Fejezd ki $y(7)$-et a hatarozott integralas segitsegevel!
7. $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau$. Szamold ki a $H * H$ konvoluciot!
8. Adott $f(x + \Delta x)$, $f(x)$, $f(x - \Delta x)$. Ird fel $f''(x)$ numerikus approximaciojat!
9. Az $y'_t = y''_{xx}$, $y(0) = y(1)$ DE $y(x, t)$ megoldasat kozelitsuk az
$$y(t) = (y(0, t), y(0.25, t), y(0.5, t), y(0.75, t))^T = (y_0, y_1, y_2, y_3)^T$$
idofuggo vektorral. Ird fel az y-ra vonatkozo kozelito linearis $y'_t = Ay$ DE rendszert! Mennyi A ?
10. Legyen $f(x) = sgn(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$, ha $x \in (-\pi, \pi)$ Mennyi $\hat{f}_{-5}$ es $\hat{f}_4$?
$y'_t(t, x) = y''_{xx}(t, x)$, $y(0, x) = 8e^{9ix} + \sin x$. Mennyi $y(t, x)$?
$y'_t(t, x) = y''_{xx}(t, x)$, $y(0, x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n} \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$. Ird fel $y(t, x)$-et vegtelen sor alakban!

4. (2+3+2+3 pont)

Legyen $f(x) = sgn(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$, ha $x \in (-\pi,\pi)$ Mennyi $\hat{f}_{-5}$ es $\cancel{X}$?

$$\hat{f}_{-5} = \left(\frac{e^{i(-5)x}}{\sqrt{2\pi}}, sgn(x)\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\frac{e^{-5ix}}{\sqrt{2\pi}}} \cdot sgn x \, dx = \int_{-\pi}^{0} \frac{e^{5ix}}{\sqrt{2\pi}} \cdot (-1)\, dx +$$

$$+ \int_{0}^{\pi} \frac{e^{5ix}}{\sqrt{2\pi}} \cdot 1 \, dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{5ix}}{5i}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{5ix}}{5i}\right]_{0}^{\pi} =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 5i}\left(1 - \underbrace{e^{-5\pi i}}_{-1}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 5i}\left(\underbrace{e^{+5\pi i}}_{-1} - 1\right) = 4i\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 5} = \frac{2\sqrt{2}}{5}\, i \,\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$y'_t(t,x) = y''_{xx}(t,x)$, $y(0,x) = 8e^{9ix} + \sin x$. Mennyi $y(t,x)$?

Mivel $\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{9ix} = -81 \cdot e^{9ix}$ és $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sin x = -1 \cdot \sin x$, így

$$y(t,x) = 8 \cdot e^{9ix} \cdot e^{-81\cdot t} + \sin x \cdot e^{-1\cdot t}$$

$y'_t(t,x) = y''_{xx}(t,x)$, $y(0,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n} \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$. Ird fel $y(t,x)$-et vegtelen sor alakban!

$$y(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n} \cdot \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-n^2 t}$$

$y''_{tt}(t,x) = y''_{xx}(t,x)$, $y(0,x) = 8e^{9ix}$, $y'(0,x) = \cos(5x) + e^{9ix}$. Mennyi $y(t,x)$?

$$y(t,x) = 8 \cdot e^{9ix} \cdot \cos(9t) + \cos(5x) \cdot \frac{\sin(5t)}{5} + e^{9ix} \cdot \frac{\sin(9t)}{9}$$

Pl.: Ha a $y''_{tt} = y''_{xx}$, $y(0,x) = 0$, $y'_t(0,x) = \cos(5x)$ DE megoldását $y(t,x) = \cos(5x)\cdot c(t)$ alakban keressük, akkor $y''_{xx} = -5^2 \cos(5x)\cdot c(t) = y''_{tt} = \cos(5x)\cdot c''(t)$, vagyis $-5^2 c(t) = c''(t) \longrightarrow c(t) = C_1 \cos(5t) + C_2 \sin(5t)$.

Továbbá $y(0,x) = 0 \longrightarrow C_1 = 0$

$y'_t(0,x) = \cos(5x) \longrightarrow C_2 = \frac{1}{5}$