Differencialegyenletek. II. Feladatsor

- Komplex fuggvenyek.
  - Legyen $\bar{A} = (x + 3z, xyz, xy^2)$. Mennyi $\nabla \times \bar{A}$?
    Legyen $\bar{A} = (x + 3y, xy, 0)$. Mennyi $\nabla \times \bar{A}$?
  - Cauchy-Riemann egyenletek.

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(u + iv) = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}(u + iv) \qquad \Longleftrightarrow \qquad u'_x = v'_y, \quad v'_x = -u'_y$$

Keresd meg u-t es v-t a kovetkezo fuggvenyek eseteben! Ellenorizd a CR egyenleteket!

$$z^2, \qquad z^3 - 2z, \qquad z\bar{z}, \qquad z - i\bar{z}, \qquad x^2 + iy^3, \qquad e^{iz}, \qquad \sin(iz), \qquad \cosh(iz), \qquad \ln(z).$$

  - Szamold ki a kovetkezo komplex integralokat!

$$\int_\Gamma z^2 + 6z - i \; dz, \qquad \Gamma = \{z(t) = (1 + i)t + 2, \; 0 \le t \le 1\},$$
$$\oint_\Gamma z^2 + 6z - i \; dz, \qquad \Gamma = \{z(t) = 2\cos t + 3i \sin t, \; 0 \le t \le 2\pi\},$$
$$\oint_\Gamma \frac{2 - 7i}{z} \; dz, \qquad \Gamma = \{z(t) = \cos t + i \sin t, \; 0 \le t \le 2\pi\},$$
$$\oint_\Gamma \frac{2 - 7i}{z - 3} \; dz, \qquad \Gamma = \{z(t) = \cos t + i \sin t, \; 0 \le t \le 2\pi\},$$
$$\oint_\Gamma \frac{1}{z} \; dz, \qquad \Gamma = \{z(t) = 0.01 \cos t + i0.01 \sin t, \; 0 \le t \le 2\pi\},$$
$$\oint_\Gamma \frac{1}{z^2} \; dz, \qquad \Gamma = \{z(t) = 0.01 \cos t + i0.01 \sin t, \; 0 \le t \le 2\pi\},$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^2 + 1} \; dz,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^2 - (3 + 3i)z + 4i} \; dz.$$

1. Oldd meg es rajzold le az alabbi DE-k megoldasait az ($y(x) = 0$, ha $x < 0$) feltetel mellett!
$y' = \delta(x) + 3\delta(x-1)$,
$y'' = \delta(x) + 3\delta(x-1)$,
$y'' = \delta'(x)$,
$y' = H(x) + 3H(x-1)$,
$y'' = H(x) + 3\delta(x-1)$,
$y' = H'(x-1)$.
Hogyan neznek ki a megoldasok az ($y(x) = 0$, ha $x > 555$) feltetel mellett? Ird fel az egyenletek altalanos megoldasat is! (Itt H a Heaviside fuggveny.)

2. Oldd meg es rajzold le az alabbi DE-k megoldasait!
$\left(\frac{d}{dx} + 1\right) G(x) = \delta(x)$,
$\left(\frac{d}{dx} + 1\right) G(x_0, x) = \delta(x - x_0)$,
a ($G(x) = 0$, illetve a $G(x_0, x) = 0$, ha $x << 0$) feltetel mellett (retardalt Green fuggveny),
Ird fel ennek a segitsegevel az $y' + y = f(x)$ DE altalanos megoldasat!

3.
- Ismeteld meg az elozo feladatot az $y'' + 2y' + 5y = f(x)$ DE eseteben!
- Ismeteld meg az elozo feladatot a

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$$

  DE eseteben!

4. Szamold ki az alabbi fuggvenyek Laplace transzformaltjait!
$1,\ \theta(t),\ \theta(t-3),\ \delta(t-3),\ t,\ e^{7t},\ e^{7it},\ \cos(7t),\ \sin(7t),\ 2\theta(t-3) + t + 4\cos(7t)$.

5. Szamold ki az alabbi fuggvenyek inverz Laplace transzformaltjait!
$3/s + 4/(s-1),\ 1/(3s-4),\ 1/(3s^2 + 12)$.

6. Szamold ki az alabbi fuggvenyparok konvolucioit!
$t, 1;\quad t, e^{-t};\quad \theta(t-2), \theta(t-3);$

7. Oldd meg a Laplace tr. segitsegevel az alabbi DE-ket!
$y' + y = 1,\quad y(0) = 3,$
$y' + y = t,\quad y(0) = 3,$
$y'' + 2y' + 5y = 1,\quad y(0) = 3, y'(0) = 2.$

8. Ellenorizd, hogy az alabbi fuggvenyek ortogonalis rendszert alkotnak az I intervallumon az $(f, g) = \int_I \overline{f(x)} g(x)\, dx$ skalarszorzatra nezve!

- $e^{inx},\quad I = [-\pi, \pi],\quad n \in \mathbb{Z},$
- $e^{i2\pi nx},\quad I = [0, 1],\quad n \in \mathbb{Z},$
- $1,\ \cos(nx),\ \sin(nx),\quad I = [0, 2\pi],\quad n \in \mathbb{Z}^+,$
- $1,\ \cos(nx),\quad I = [0, \pi],\quad n \in \mathbb{Z}^+,$
- $\sin(nx),\quad I = [0, \pi],\quad n \in \mathbb{Z}^+.$
  Keresd meg ezen fuggvenyek normalizalt alakjat!

9.
- Oldd meg Fourier sorok segitsegevel a kovetkezo PDE-t:
  $y_t(t, x) = y_{xx}(t, x),\ y(0, x) = 3 + \cos(4x) + 6\sin(7x) + e^{3ix}$, ha $-\pi \le x \le \pi$, es $y(t, x)$ 2π periodusu x szerint.
- Oldd meg Fourier sorok segitsegevel a kovetkezo PDE-t:
  $y_t(t, x) = y_{xx}(t, x),\ y(0, x) = sgn(x)$, ha $-\pi \le x \le \pi$, es $y(t, x)$ 2π periodusu x szerint.
- Oldd meg Fourier sorok segitsegevel a kovetkezo PDE-t:
  $y_t(t, x) = y_{xx}(t, x),\ y(0, x) = sgn(x)$, ha $-77 \le x \le 77$, es $y(t, x)$ 154 periodusu x szerint.
- Oldd meg Fourier sorok segitsegevel a kovetkezo PDE-t:
  $y_{tt}(t, x) = y_{xx}(t, x),\ y(0, x) = sgn(x)$ es $y_t(0, x) = 0$, ha $-\pi \le x \le \pi$, es $y(t, x)$ 2π periodusu x szerint.
- Oldd meg Fourier sorok segitsegevel a kovetkezo PDE-t:
  $y_{tt}(t, x) = y_{xx}(t, x),\ y_t(0, x) = sgn(x)$ es $y(0, x) = 0$, ha $-\pi \le x \le \pi$, es $y(t, x)$ 2π periodusu x szerint.

1 Tavalyi ZH 2.

4. (1+2+3+4 pont)
Keresd meg es rajzold le a kovetkezo egyenletek megoldasait!
$y' = \delta(x),\ y(-1) = 0,$
$y' = 3\delta(x-4),\ y(-1) = 2,$
$y'' = \delta(x),\ y(-1) = 0,\ y'(-1) = 0$
$y'' = \delta(x-4),\ y(-1) = 2,\ y'(-1) = 3$

1. (3+2+2+2+1 pont); $\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$
a) Oldd meg az allando varialasanak a modszerevel az $y'(t) - 2y(t) = t$ egyenletet!
b) Ird fel az $y'(t) - 2y(t) = 3$, $y(0) = 4$ DE Laplace transzformaltjat!
Mennyi $Y(s)$?
Mennyi $\mathcal{L}^{-1}(Y(s))$? (Itt $\mathcal{L}^{-1}$ az inverz Lapalace transzformaciot jeloli.)
Mi a DE $y(t)$ partikularis megoldasa?

2. (2+1+3+3+1 pont)
Szamitsd ki a Laplace tr. definicioja alapjan a kovetkezoket:
a) $F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(e^{3t-7})$.
$F(s)=$
Esetunkben milyen s eseten letezik a Laplace transzformaciot definialo impropius integral?
$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(H(t-7)e^{3t})$ (Itt H a Heaviside fuggveny.)
$F(s)=$
b) Szamold ki az $f(t) = e^t$ es a $g(t) = t$ fuggvenyek $h = f * g$ konvoluciojat!
Mennyi $\mathcal{L}(f(t))\mathcal{L}(g(t)) - \mathcal{L}(h(t))$?

3. (5×2 pont)
$y'' + 9y = 5t^2,\ y(0) = 6,\ y'(0) = 7.$ Mennyi $Y(s)$? ($\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$)
$Y(s) =$
Mi a megoldasa a $y'' + 9y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ DE-nek?
Oldd meg a $G'' + 9G = \delta(t)$ egyenletet, ahol $G(t) = 0$, ha $t < 0$!
Rajzold le $G(t)$-t!
Ird fel a $y'' + 9y = f(t)$ egyenlet megoldasat, ha $y(t) = f(t) = 0$ amikor $t < 0$!

2 Tavalyi PotZH 2.

4. (1+2+3+4 pont)
Ird fel es rajzold le (rajz csak az a) es c) esetekben szukseges) a kovetkezo egyenletek megoldasait!
a) $y' = \delta(x),\ y(-1) = 0,$
b) $y' = f(x)$, ha $y(x) = f(x) = 0$ amikor $x < 0$!
c) $y'' = \delta(x),\ y(-1) = 0,\ y'(-1) = 0$
d) $y'' = f(x)$, ha $y(x) = f(x) = 0$ amikor $x < 0$!

1. (3+2+2+2+1 pont); $\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$
a) Oldd meg az allando varialasanak a modszerevel az $y'(t) + 2y(t) = 3$ egyenletet!
b) Ird fel az $y'(t) + 2y(t) = 3$, $y(0) = 4$ DE Laplace transzformaltjat!
Mennyi $Y(s)$?
Mennyi $\mathcal{L}^{-1}(Y(s))$? (Itt $\mathcal{L}^{-1}$ az inverz Lapalace transzformaciot jeloli.)
Mi a DE $y(t)$ partikularis megoldasa?

2. (2+1+3+3+1 pont)
Szamitsd ki a Laplace tr. definicioja alapjan a kovetkezoket:
a) $F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(te^{3t})$.
$F(s)=$

Esetunkben milyen s eseten letezik a Laplace transzformaciot definialo impropius integral?
$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(H(t-7)\sin(3t))$ (Itt H a Heaviside fuggveny.)
$F(s)=$
b) Szamold ki az $f(t) = t^2$ es a $g(t) = t$ fuggvenyek $h = f * g$ konvoluciojat!
Mennyi $\mathcal{L}(f(t))\mathcal{L}(g(t)) - \mathcal{L}(h(t))$?

3. (5×2 pont)
$y'' - 9y = 5t^2,\ y(0) = 6,\ y'(0) = 7.$ Mennyi $Y(s)$? ($\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$)
$Y(s) =$
Mi a megoldasa a $y'' - 9y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ DE-nek?
Oldd meg a $G'' - 9G = \delta(t)$ egyenletet, ahol $G(t) = 0$, ha $t \leq 0$!
Rajzold le $G(t)$-t!
Ird fel a $y'' - 9y = f(t)$ egyenlet megoldasat, ha $y(t) = f(t) = 0$ amikor $t < 0$!