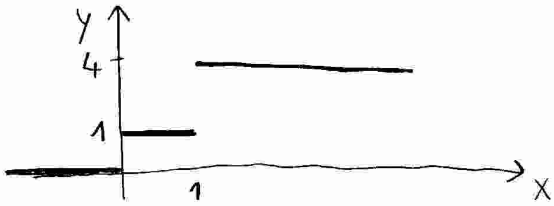
① a) $y' = \delta(x) + 3\delta(x-1)$ , $y(x) = 0$, ha $x < 0$

$\longrightarrow y(x) = H(x) + 3H(x-1)$, mivel $H'(x) = \delta(x)$, $H'(x-1) = \delta(x-1)$



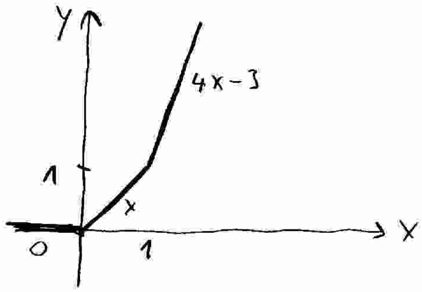

b) $y'' = \delta(x) + 3\delta(x-1)$ , $y(x) = 0$, ha $x < 0$

$$\tilde{y}'' = \delta(x) \longrightarrow \tilde{y}' = H(x) \longrightarrow \tilde{y}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \\ x, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

$$\tilde{\tilde{y}}'' = 3\delta(x-1) \longrightarrow \tilde{\tilde{y}}' = 3H(x-1) \longrightarrow \tilde{\tilde{y}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 1 \\ 3x-3, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

tehát

$$y(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \\ x, & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 4x-3, & \text{ha } 1 < x \end{cases}$$

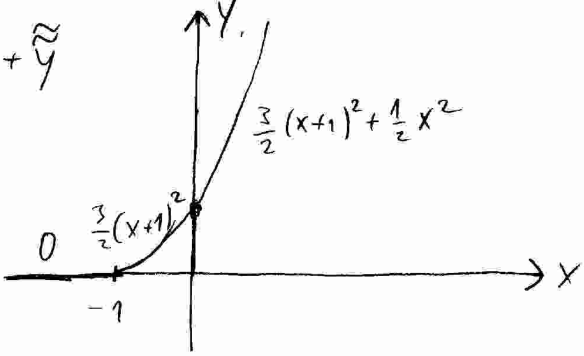



c) $y'' = H(x) + 3H(x+1)$ , $y(x) = 0$, ha $x << 0$

$$\tilde{y}'' = H(x) \longrightarrow \tilde{y}' = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \\ x, & \text{ha } x > 0 \end{cases} \longrightarrow \tilde{y} = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

$$\tilde{\tilde{y}}'' = 3H(x+1) \longrightarrow \tilde{\tilde{y}}' = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < -1 \\ 3(x+1), & \text{ha } -1 < x \end{cases} \longrightarrow \tilde{\tilde{y}} = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < -1 \\ \frac{3(x+1)^2}{2}, & \text{ha } -1 < x \end{cases}$$

$y = \tilde{y} + \tilde{\tilde{y}}$



② $\left(\frac{d}{dx}+1\right)G(x)=\delta(x)$ , $G(x)=0$, ha $x<0$

$G(x)$ szingularitása $x=0$-nál ugyanolyan mint a

$\left(\frac{d}{dx}\right)K(x)=\delta(x)$ egyenletnek $\longrightarrow$ $K(x)=H(x)$, mivel $H'=\delta$

Tehát $G(0^+)=H(0^+)=1$. (itt $G(0^+)=\lim_{x\to 0+0} G(x)$)

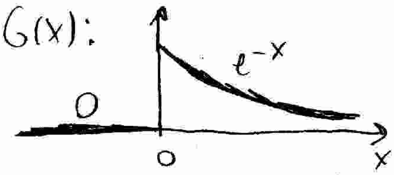
Ha $x>0$, $G(x)=y_{part}(x)$, ahol $\underbrace{y_{part}'+y_{part}=0,\ y_{part}(0)=1}_{y_{part}=e^{-x}}$.

Tehát $G(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha } x<0 \\ e^{-x}, & \text{ha } x>0. \end{cases}$

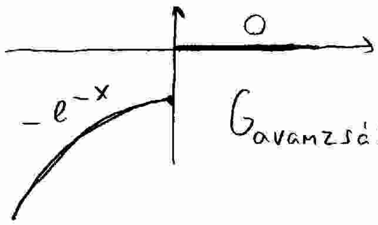
Az $y'+y=f(x)$ egyenlet $y^f$ megoldása, ha ($y(x)=0$, ha $x\ll 0$)

$$y^f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} G(x-z)f(z)\,dz=\int_{-\infty}^{x} e^{-(x-z)}f(z)\,dz$$

$G(x)$:




retardált Green-f.




$G_{avanzsált}(x)$

③ $y''+2y'+5y=f(x)$

retardált Green függvény $G(x)$: $G(x)=0$, ha $x<0$
$G''+2G'+5G=\delta(x)$

Hogy néz ki $G$ az $x=0$, $x>0$ körül?

$K''(x)=\delta(x)$ (elhagytuk a kevésbé szing. $2G'$, $5G$ tagokat)

$\downarrow$

$K'(x)=H(x) \longrightarrow K(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & x>0\end{cases}$ $\int_0^x H(z)\,dz=\int_0^x 1\,dz=x$

Tehát $G'(0^+)=K'(0^+)=1$
$G(0^+)=K(0^+)=0$

Ha $x>0$, $G(x)=y_{part}(x)$, ahol $y_{part}(x)$ a $\underbrace{y''+2y'+5y=0,\ \begin{matrix}y'(0)=1\\ y(0)=0\end{matrix}}$ DE megoldása.

$\lambda^2+2\lambda+5=0 \to \lambda_{1,2}=-1\pm 2i$

$y_{ált}=C_1e^{(-1+2i)x}+C_2e^{(-1-2i)x}$

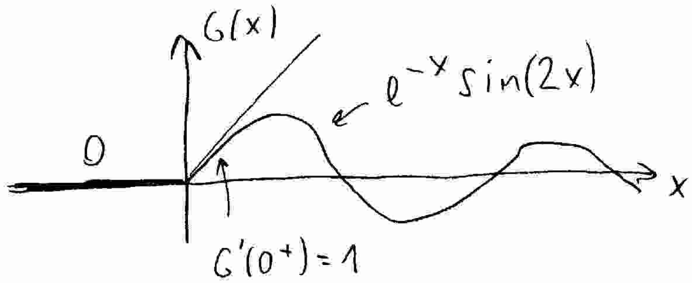
$\begin{bmatrix} C_1+C_2=0 \\ (-1+2i)C_1+(-1-2i)C_2=1\end{bmatrix}$

$C_1=-\frac{1}{4}i$, $C_2=\frac{1}{4}i$

$y_{part}=\frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x$

Tehát az $y''+2y'+5y=f(x)$ egyenlet azon $y^f$ megoldása, amelyre $y(x)=0$, ha $x<<0$:

$$y^f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x-z)f(z)\,dz=$$
$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{-(x-z)}\sin(2(x-z))f(z)\,dz$$




$e^{ix}=\cos x+i\sin x$
$e^{-ix}=\cos x-i\sin x$

$\Downarrow$

$\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

$\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

④ $\mathcal{L}[1] = \int_0^\infty e^{-st}\cdot 1\,dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^{\infty} = \frac{e^{-s\cdot\infty}}{-s} - \frac{e^{-0}}{-s} = \frac{1}{s}$

$\mathcal{L}[H(t)] = \int_0^\infty e^{-st}\cdot 1\,dt = \frac{1}{s}$

$\mathcal{L}[H(t-3)] = \int_0^3 e^{-st}\cdot 0\,dt + \int_3^\infty e^{-st}\cdot 1\,dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=3}^{\infty} = e^{-3s}\cdot\frac{1}{s}$

vagy: $\mathcal{L}[f_a(t)] = e^{-as}F(s) \longrightarrow \mathcal{L}[H(t-3)] = e^{-3s}\mathcal{L}[H(t)] = \frac{e^{-3s}}{s}$

ahol $f_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < a \\ f(t-a), & \text{ha } t > a \end{cases}$

$\mathcal{L}[\delta(t-3)] = \int_0^\infty e^{-st}\delta(t-3)\,dt = e^{-s\cdot 3}$

$\mathcal{L}[t] = \int_0^\infty e^{-st}\cdot t\,dt = \left[\left|\begin{matrix} f' = e^{-st} & g = t \\ f = \frac{e^{-st}}{-s} & g' = 1 \end{matrix}\right|\right]_0^\infty = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\cdot t\right]_{t=0}^{\infty} - \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-s}\cdot 1\,dt$

$= (0-0) - \left[\frac{e^{-st}}{s^2}\right]_0^\infty = \frac{1}{s^2}$

$\mathcal{L}[e^{7t}] = \int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{7t} = \frac{1}{s-7}$

$\mathcal{L}[e^{7it}] = \int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{7it} = \frac{1}{s-7i}$

$\mathcal{L}[\cos(7t)] = \int_0^\infty e^{-st}\,\frac{e^{7it}+e^{-7it}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-7i} + \frac{1}{s+7i}\right) = \frac{s}{s^2+7^2}$

$\mathcal{L}[\sin(7t)] = \int_0^\infty e^{-st}\,\frac{e^{7it}-e^{-7it}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-7i} - \frac{1}{s+7i}\right) = \frac{7}{s^2+7^2}$

$\mathcal{L}[2H(t-3)+t+4\cos(7t)] = 2\cdot e^{-3s}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + 4\cdot\frac{s}{s^2+7^2}$

⑤ $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s}+\frac{4}{s-1}\right]=3+4\cdot e^{1\cdot t}$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3s-4}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3}\,\frac{1}{s-4/3}\right]=\frac{1}{3}\,e^{\frac{4}{3}t}$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3s^2+12}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3\cdot 2}\,\frac{2}{s^2+2^2}\right]=\frac{1}{6}\sin(2t)$

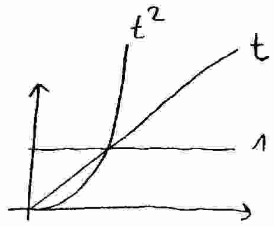
$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+7}{s^2-3s-10}\right]=-\frac{5}{7}e^{-2t}+\frac{12}{7}e^{5t}$

mivel $\frac{s+7}{s^2-3s-10}=\frac{s+7}{(s+2)(s-5)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s-5}=\frac{-5/7}{s+2}+\frac{12/7}{s-5}$

mivel $s+7=A(s-5)+B(s-2)$

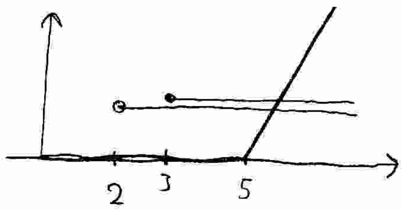
⑥ Konvolúció: $(f*g)(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$

$t*1$: $\int_0^t (t-\tau)\cdot 1\,d\tau=t^2-\frac{t^2}{2}=\frac{1}{2}t^2$ $\longrightarrow$




$t*e^{-t}$: $\int_0^t (t-\tau)\cdot e^{-\tau}\,d\tau=-1+e^{-t}+t$

$H(t-2)*H(t-3)$: $\int_0^t H((t-\tau)-2)\,H(\tau-3)\,d\tau=(-5+t)H(-5+t)$



7 a) $y' + y = 1, \quad y(0) = 3$ $\qquad Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$

$$(sY(s) - y(0)) + Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$(sY(s) - 3) + Y(s) = \frac{1}{s} \longrightarrow Y(s) = \frac{1/s + 3}{1 + s}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(1+s)} + \frac{3}{1+s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{s} \underbrace{- \frac{1}{1+s} + \frac{3}{1+s}}_{\frac{2}{s-(-1)}}\Big] = *$$

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{1+s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{1+s}$$

$$* = 1 + 2e^{(-1)\cdot t}$$

---

b) $y' + y = t, \quad y(0) = 3$

$As(1+s) + Bs^2(1+s) + Cs^3 = 1$

tehát $A = 1, B = -1, C = 1$

$$(sY(s) - y(0)) + Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{1/s^2 + 3}{1 + s} = \frac{1}{s^2(1+s)} + \frac{3}{1+s} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{1+s} + \frac{3}{1+s}$$

$$= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{4}{1+s}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{4}{1+s}\right] = t - 1 + 4e^{-t}$$

⑦ c) $y''+2y'+5y=1, \quad y(0)=3, \quad y'(0)=2$

$\mathcal{L}\downarrow$

$$\left(s^2Y(s)-s\,y(0)-y'(0)\right)+2\left(sY(s)-y(0)\right)+5\,Y(s)=\frac{1}{s}$$

$$Y(s)=\frac{1/s+3s+2+6}{s^2+2s+5}=$$

$$=\frac{1}{s(s-(-1+2i))(s-(-1-2i))}+\frac{3s+8}{(s+1-2i)(s+1+2i)}=$$

$$=\left(\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1-2i}+\frac{C}{s+1+2i}\right)+\left(\frac{D}{s+1-2i}+\frac{E}{s+1+2i}\right)=$$

$$=\frac{1/5}{s}+\frac{-\frac{1}{10}+\frac{1}{20}i}{s+1-2i}+\frac{-\frac{1}{10}-\frac{1}{20}i}{s+1+2i}+\frac{\frac{3}{2}-\frac{5i}{4}}{s+1-2i}+\frac{\frac{3}{2}+\frac{5i}{4}}{s+1+2i}=$$

$$=\frac{1/5}{s}+\frac{\frac{7}{5}-\frac{6i}{5}}{s+1-2i}+\frac{\frac{7}{5}+\frac{6i}{5}}{s+1+2i}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\frac{1}{5}+\left(\frac{7}{5}-\frac{6i}{5}\right)e^{-(1+2i)t}+\left(\frac{7}{5}+\frac{6i}{5}\right)e^{-(1-2i)t}=$$

$$=\frac{1}{5}+e^{-x}\left(\frac{14}{5}\cos(2t)+\frac{12}{5}\sin(2t)\right)$$

Zh2, Diff.Egy., 2012.05.02. NEPTUN: Gyak.Vez.:

Név: Aláírás: 48 db

1. (3+2+2+2+1 pont); $\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$

a) Oldd meg az allando varialasanak a modszerevel az $y'(t) - 2y(t) = t$ egyenletet!

hom: $y' - 2y = 0$

$\Downarrow$

$y = C \cdot e^{2t}$

$y = C \cdot e^{2t}$

(1) $y' = C' e^{2t} + C \cdot 2 e^{2t}$

$(C' e^{2t} + C \cdot 2 e^{2t}) - 2 \cdot (C \cdot e^{2t}) = t$

$C' e^{2t} = t$ (1)

$C' = t e^{-2t}$

$C = \int t e^{-2t} dt = \left| \begin{matrix} f' = e^{-2t} & g = t \\ f = \frac{e^{-2t}}{-2} & g' = 1 \end{matrix} \right| = \frac{e^{-2t}}{-2} \cdot t - \int \frac{e^{-2t}}{-2} \cdot 1\, dt$

$= \frac{e^{-2t}}{-2} \cdot t - \frac{e^{-2t}}{4} + k$

$y_{ált} = e^{2t} \cdot C = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + k e^{2t}$ (1)

b) Ird fel az $y'(t) - 2y(t) = 3$, $y(0) = 4$ DE Laplace transzformaltjat!

$(sY(s) - 4) - 2Y(s) = \frac{3}{s}$ (2)

$A(s-2) + Bs = 3 + 4s$

$A + B = 4$

$-2A = 3$

Mennyi $Y(s)$?

$Y(s) = \frac{\frac{3}{s} + 4}{s - 2} = \frac{3 + 4s}{s(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2}$ $\rightarrow$ $A = -3/2$, $B = 5\frac{1}{2}$

(2) $= \frac{-3/2}{s} + \frac{5\frac{1}{2}}{s-2}$

Mennyi $\mathcal{L}^{-1}(Y(s))$? (Itt $\mathcal{L}^{-1}$ az inverz Lapalace transzformaciot jeloli.)

$-\frac{3}{2} + 5\frac{1}{2} \cdot e^{2t}$

(1) (1)

Mi a DE $y(t)$ partikularis megoldasa?

$-\frac{3}{2} + \frac{11}{2} e^{2t}$ (1)

1

2. (2+1+3+3+1 pont)
Szamitsd ki a Laplace tr. definicioja alapjan a kovetkezoket:
a) $F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(e^{3t-7})$.
$F(s)$= $\int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{3t-7} dt = e^{-7} \int_0^\infty e^{-(s-3)t} dt =$

$= e^{-7} \lim_{R\to\infty} \left[ \frac{e^{-(s-3)t}}{-(s-3)} \right]_{t=0}^{R} = \frac{e^{-7}}{s-3}$ 1

1

Esetunkben milyen $s$ eseten letezik a Laplace transzformaciot definialo impropius integral?

ha $s > 3$ 1

$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(H(t-7)e^{3t})$ (Itt $H$ a Heaviside fuggveny.) 1
$F(s)$= $\int_0^\infty e^{-st} e^{3t} \cdot H(t-7) dt = \int_7^\infty e^{-(s-3)t} dt =$

$= \lim_{R\to\infty} \left[ \frac{e^{-(s-3)t}}{-(s-3)} \right]_{t=7}^{R} = \frac{e^{-(s-3)\cdot 7}}{(s-3)} = e^{-7s} \cdot e^{3\cdot 7} \cdot \frac{1}{s-3}$

1 1

b) Szamold ki az $f(t) = e^t$ es a $g(t) = t$ fuggvenyek $h = f * g$ konvoluciojat!

$h(t) = \int_0^t e^{t-\tau} \cdot \tau \, d\tau = e^t \int_0^t e^{-\tau} \tau \, d\tau = e^t \left\| \begin{matrix} f' = e^{-\tau} & g = \tau \\ f = -e^{-\tau} & g' = 1 \end{matrix} \right\|_0^t =$

1

$= e^t \left[ -\tau e^{-\tau} - e^{-\tau} \right]_{\tau=0}^{t} = e^t \left\{ (-t e^{-t} - e^{-t}) - (0 - 1) \right\} = -t - 1 + e^t$

1 1

Mennyi $\mathcal{L}(f(t))\mathcal{L}(g(t)) - \mathcal{L}(h(t))$? Ez automatikusam nulla. 1

3. (5 × 2 pont)

$y'' + 9y = 5t^2$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 7$. Mennyi $Y(s)$? ($\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$)

$Y(s) =$ $(s^2 Y(s) - s \cdot 6 - 7) + 9Y(s) = 5 \cdot \frac{2}{s^3}$ ①

$$Y(s) = \frac{\frac{10}{s^3} + 6s + 7}{s^2 + 9}$$ ①

Mi a megoldasa a $y'' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ DE-nek?

$\lambda^2 + 9 = 0 \to \lambda_1 = 3i, \lambda_2 = -3i \to y_{ált} = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t) \longrightarrow C_1 = 0$ ①

$y'_{ált} = -3C_1 \sin(3t) + 3C_2 \cos(3t) \longrightarrow C_2 = \frac{1}{3}$

$y_{part} = \frac{1}{3} \sin(3t)$ ①

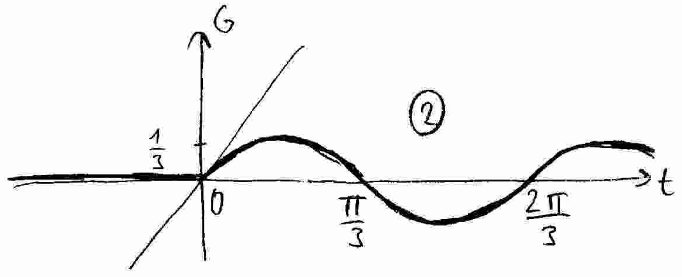
Oldd meg a $G'' + 9G = \delta(t)$ egyenletet, ahol $G(t) = 0$, ha $t < 0$!

$K'' = \delta(t) \to K = \begin{cases} t, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \longrightarrow K(0^+) = 0,\ K'(0^+) = 1 \longrightarrow$

(ez ugyanaz, mint az előző feladat $y(0)=0$, $y'(0)=1$ kezdeti feltételei)

$$G(t) = \begin{cases} \frac{1}{3} \sin(3t), & \text{ha } t > 0 \\ 0, & \text{ha } t < 0 \end{cases}$$ ②

Rajzold le $G(t)$-t!




Ird fel a $y'' + 9y = f(t)$ egyenlet megoldasat, ha $y(t) = f(t) = 0$ amikor $t < 0$!

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau) f(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{3} \sin(3(t-\tau)) f(\tau)\, d\tau$$ ②

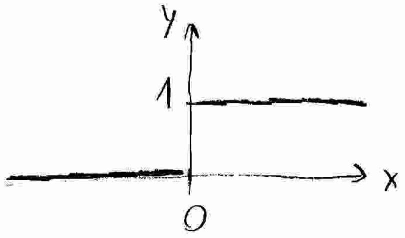
$$\left( = \int_{0}^{t} \frac{1}{3} \sin(3(t-\tau)) f(\tau)\, d\tau, \text{ ha } t > 0 \right)$$

2

4. (1+2+3+4 pont)
Keresd meg es rajzold le a kovetkezo egyenletek megoldasait!

$y' = \delta(x),\ y(-1) = 0,$

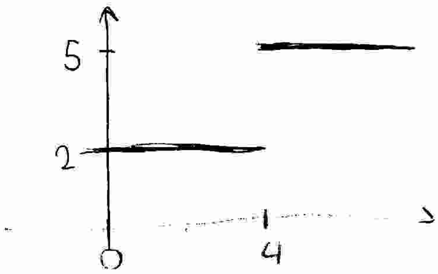
$y = H(x)$




1

$y' = 3\delta(x-4),\ y(-1) = 2,$

$y = 2 + 3H(x-4)$



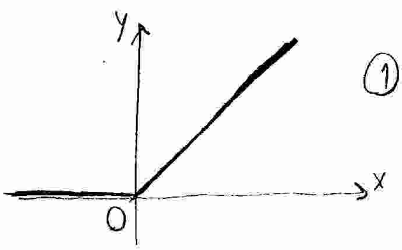

2

$y'' = \delta(x),\ y(-1) = 0,\ y'(-1) = 0$

$y' = H(x)$

$$y = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ x & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

2



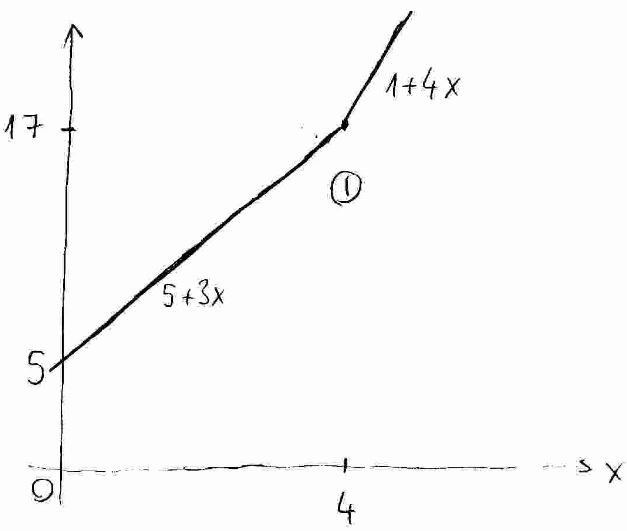

1

$y'' = \delta(x-4),\ y(-1) = 2,\ y'(-1) = 3$

$$\boxed{\left.\begin{matrix} y'' = 0 \\ y(-1) = 2 \\ y'(-1) = 3 \end{matrix}\right\} \to y = 5 + 3x}$$

$$y = \begin{cases} 5 + 3x, & \text{ha } x < 4 \quad (1) \\ 5 + 3x + (x-4), & \text{ha } x > 4 \quad (2) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 5 + 3x, & \text{ha } x < 4 \\ 1 + 4x, & \text{ha } x > 4 \end{cases}$$



## Görbe menti integrálás

$\bar{A}$ vektormező: $\bar{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\Gamma$ görbe: $r: [a,b] \to \mathbb{R}^3$

$$\int_\Gamma \bar{A}(\bar{r})d\bar{r} = \int_a^b \bar{A}(\bar{r}(t)) \cdot \frac{d\bar{r}(t)}{dt} \cdot dt = \int_\Gamma A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3$$

pl. $\bar{r}(t) = (t, 1-t^2, 2t+1)$ , $t \in [0,1]$

$\bar{A}(\bar{r}) = (x+y,\ z-x^2,\ y^3)$

$\frac{d\bar{r}(t)}{dt} = (1, -2t, 2)$

$$\int_\Gamma \bar{A}\, d\bar{r} = \int_0^1 \left( (t)+(1-t^2),\ (2t+1)-(t)^2,\ (1-t^2)^3 \right) \cdot (1, -2t, 2)\, dt =$$

$$= \int_0^1 [t+1-t^2]\cdot 1 + [2t+1-t^2]\cdot(-2t) + [(1-t^2)^3]\cdot 2 \ dt$$

## Stokes tétel:

$$\oint_\Gamma \bar{A}\, d\bar{r} = \iint_D \mathrm{rot}\, \bar{A}\, d\bar{n}$$

~~D: felület $\mathbb{R}^3$-ban, $\Gamma = \partial D$ a D-t határoló görbe, $d\bar{n}$ felületelem~~

$$\mathrm{rot}\, \bar{A} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \bar{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}A_3 - \frac{\partial}{\partial z}A_2\right) - \bar{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}A_3 - \frac{\partial}{\partial z}A_1\right) + \bar{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}A_2 - \frac{\partial}{\partial y}A_1\right)$$

## Green tétel: (2d Stokes)

$$\oint_\Gamma \bar{A}\, d\bar{r} = \iint_D \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\, dx\,dy$$

Stokes $\Rightarrow$ Green: 2d: $\bar{A} = (A_1(x,y), A_2(x,y))$ $\quad \bar{r}(t) = (x(t), y(t))$

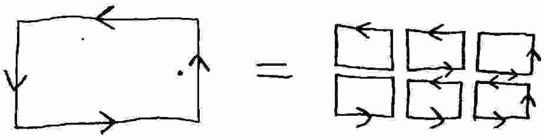
beágyazás 3d-be: $\bar{B} = (A_1(x,y), A_2(x,y), 0)$ $\quad \bar{s}(t) = (x(t), y(t), 0)$

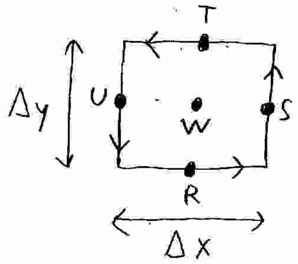
Ekkor $d\bar{n} = \bar{k}\, dx\,dy$ , $\mathrm{rot}\, \bar{B} = \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\cdot \bar{k}$

$$\oint_\Gamma \bar{A}\, d\bar{r} = \oint_{\Gamma_{3d}} \bar{B}\, d\bar{s} = \iint_{D_{3d}} \left(0, 0, \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\cdot(0,0,1)\, dx\,dy =$$

$$= \int_D \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\, dx\,dy$$

Biz.






W pont $=(x,y)$

$$\approx A_1(R)\cdot\Delta x + A_2(S)\cdot\Delta y + A_1(T)\cdot(-\Delta x) + A_2(U)(-\Delta y)$$

$$= A_1\left(x, y-\frac{\Delta y}{2}\right)\cdot\Delta x + A_2\left(x+\frac{\Delta x}{2}; y\right)\cdot\Delta y +$$

$$+ A_1\left(x, y+\frac{\Delta y}{2}\right)\cdot(-\Delta x) + A_2\left(x-\frac{\Delta x}{2}, y\right)\cdot(-\Delta y)$$

$$\approx \frac{\partial A_1}{\partial y}\cdot\left(-\frac{\Delta y}{2}\right)\cdot\Delta x + \frac{\partial A_2}{\partial x}\cdot\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\Delta y +$$

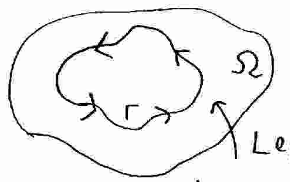
$$+ \frac{\partial A_1}{\partial y}\cdot\left(\frac{\Delta y}{2}\right)\cdot(-\Delta x) + \frac{\partial A_2}{\partial x}\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot(-\Delta y)$$

$$= \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\Delta x\,\Delta y$$

Tehát $\displaystyle\oint_{\square} \bar{A}\, d\bar{r} = \iint \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\, dx\, dy$

---

Cauchy integrál-tétel:




Legyen $f(z)$ holomorf az egyszeresen összefüggő $\Omega$ tartományon. legyen $\Gamma$ görbe $\Omega$ belsejében. Ekkor $\oint_\Gamma f(z)dz = 0$.

Biz. $\oint_\Gamma f(z)dz = \oint_\Gamma f(x(t)+iy(t))\cdot(\dot{x}(t)+i\dot{y}(t))dt =$

$$= \int_\Gamma \left[u(x(t),y(t)) + i\,v(x(t),y(t))\right]\cdot(\dot{x}(t)+i\dot{y}(t))dt =$$

$$= \int_\Gamma (u\cdot\dot{x} - v\cdot\dot{y}) + i\cdot(u\cdot\dot{y}+v\cdot\dot{x})dt = \int_\Gamma (u,-v)\cdot(\dot{x},\dot{y}) + i(v,u)\cdot(\dot{x},\dot{y})dt$$

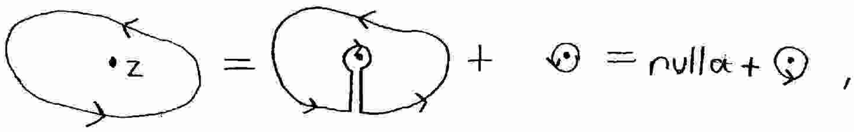
$$= \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{=0 \text{ mivel } u'_y = -v'_x} + i\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{=0 \text{ mivel } u'_x = v'_y} dx\,dy = 0$$

Cauchy formula: $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(u)}{u-z}\,du = f(z)$,

ha:


f holomorf az egyszeresen összefüggő D tartomány belsejében

Biz:




,


$u-z$ $\qquad u-z=r\cdot e^{i\varphi},\quad \varphi\in[0,2\pi)$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_S \frac{f(u)}{u-z}\,du \approx \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{r\cdot e^{i\varphi}}\cdot(r\cdot i\cdot e^{i\varphi})\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\cdot f(z)\cdot i\cdot 2\pi = f(z)$$

ha $r\approx 0$, vagyis $S$ egy kis kör, $f(u)\approx f(z)$ $S$-en.

---

A Cauchy formulát deriválva $z$ szerint:

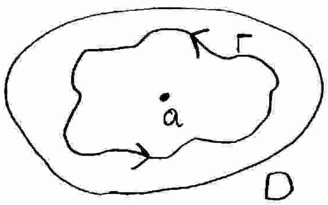
$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(u)}{(u-z)^2}\,du, \qquad \text{mivel } \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{u-z}\right) = \frac{1}{(u-z)^2}$$

$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(u)}{(u-z)^3}\,du, \qquad \text{mivel } \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{u-z}\right) = \frac{2}{(u-z)^2}$$

általánosam

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(u)}{(u-z)^{n+1}}\,du.$$

---




Ha f holomorf D-n az a pontot kivéve, és pl.

$$f(z) = \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} + g(z),$$ ahol g holomorf D-n, akkor

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i\cdot c_{-1}$$

Feladatok. komplex Függvények.

(1a) $\bar{A}=(x+3z,\ xyz,\ xy^2)$

$$\operatorname{rot}\bar{A}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x+3z & xyz & xy^2\end{vmatrix}=\bar{i}\left(\frac{\partial(xy^2)}{\partial y}-\frac{\partial(xyz)}{\partial z}\right)-\bar{k}\left(\frac{\partial(xyz)}{\partial x}-\frac{\partial(x+3z)}{\partial y}\right)$$

$$+\bar{k}\left(\frac{\partial(xyz)}{\partial x}-\frac{\partial(x+3z)}{\partial y}\right)$$

$$=(x\cdot 2y-xy,\ -yz,\ yz)$$

(2) a) $f(z)=z^2=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+i(2xy)$

CR: $(x^2-y^2)'_x=(2xy)'_y$ $\quad$ $(2xy)'_x=-(x^2-y^2)'_y$

$2x=2x$ ✓ $\quad$ $2y=2y$ ✓

d) $f(z)=z-i\bar{z}=(x+iy)-i(x-iy)=(x-y)+i(y-x)$

CR: $(x-y)'_x=(y-x)'_y$ $\quad$ $(y-x)'_x=-(x-y)'_y$

$1=1$ ✓ $\quad$ $\underline{-1\neq 1}$ Nem teljesül nem holomorf.

e) $f(x+iy)=x^2+iy^3$

CR: $(x^2)'_x=(y^3)'_y$ $\quad$ $(y^3)'_x=-(x^2)'_y$

$\underline{2x\neq 3y^2}$ $\quad$ $\underline{0=0}$

i) $f(z)=\ln z=\ln(x+iy)=\ln\left[\sqrt{x^2+y^2}\cdot e^{i\cdot\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}\right]$

$=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+i\cdot\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ $\quad$ (ha pl. $x>0$ és $y>0$)

CR: $\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right)'_x=\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)'_y$ $\quad$ $\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)'_x=-\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right)'_y$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}$ ✓ $\quad$ $\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y$ ✓

③ a) $I=\int_\Gamma z^2+6z-i\,dz$ $\qquad \Gamma=\{z(t)=(1+i)t+2,\ 0\le t\le 1\}$

Mivel $z^2+6z-i$ mindenütt holomorf és

$\left(\frac{z^3}{3}+6\cdot\frac{z^2}{2}-iz\right)'=z^2+6z-i$, így $I$ a primitív függvénynek

$z(1)$ és a $z(0)$ végpontokban kiszámolt értékeinek a

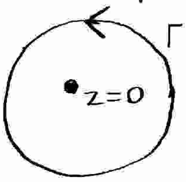
különbsége: $\qquad z(0)=2,\quad z(1)=3+i$

$$I=\left(\frac{(3+i)^3}{3}+6\cdot\frac{(3+i)^2}{2}-i\cdot(3+i)\right)-\left(\frac{2^3}{3}+\frac{6\cdot 2^2}{2}-i\cdot 2\right)$$

b) $\int_\Gamma z^2+6z-i\,dz$ $\qquad \Gamma=\{z(t)=2\cos t+3\cdot i\cdot\sin(t),\ 0\le t\le 2\pi\}$

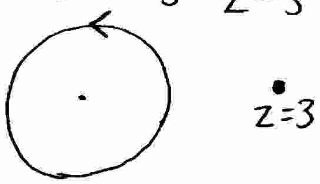
Holomorf függvény integrálja zárt görbe mentén automatikusan nulla.

c) $I=\oint_\Gamma \frac{2-7i}{z}\,dz$ $\qquad \Gamma=\{z(t)=\cos t+i\cdot\sin t,\ 0\le t\le 2\pi\}$




$I=2\pi i\cdot(2-7i)=(14+4i)\cdot\pi$

d) $I=\oint \frac{2-7i}{z-3}\,dz$ $\qquad \Gamma=\{z(t)=\cos t+i\cdot\sin t,\ 0\le t\le 2\pi\}$




$\frac{2-7i}{z-3}$ holomorf az egységkörben

(mivel a $z=3$ pólus azon kívül van),

így $I=0$

f) $I=\oint\frac{1}{z^2}\,dz$ $\qquad \Gamma=\{z(t)=0.01\cos t+i\cdot 0.01\sin t,\ 0\le t\le 2\pi\}$

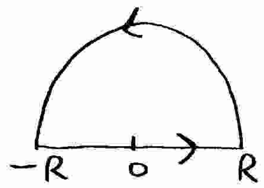
A $z=0$ pólus ugyan belül van a 0.01 sugarú körön,

de $\frac{1}{z^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{0}{z}+\text{holomorf}=\frac{1}{z^2}+\frac{0}{z}+0$,

így $I=2\pi i\cdot 0=0$.

az $\frac{1}{z-0}$ együtthatója

g) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^2+1} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-i/2}{z-i} + \frac{i/2}{z+i} dz =$




$\lim\limits_{R\to\infty} \underbrace{\int_{\curvearrowleft} \frac{-i/2}{z-i} dz}_{2\pi i\cdot\left(-\frac{i}{2}\right)} + \underbrace{\int_{\curvearrowleft} \frac{i/2}{z+i} dz}_{0} = \pi$

a $z=i$ pólus a félkörön belül van

a $z=-i$ pólus a félkörön kívül van

Itt felhasználtuk, hogy $\left| \int_{\curvearrowleft} \frac{1}{z^2+1} dz \right| \leq \underbrace{\frac{1}{R^2}}_{\text{Felső becslés az integrandus abszolút értékére}} \cdot \underbrace{\pi \cdot R}_{\text{a kontúr hossza}} \longrightarrow 0,$ ha $R \to 0$

h) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^2+(3+3i)z+4i} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1/2 - 1/2 \cdot i}{z+(1+i)} dz + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-1/2 + 1/2\, i}{z+(2+2i)} dz$

$= \lim\limits_{R\to\infty} \underbrace{\int_{\curvearrowleft} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i}{z+(1+i)} dz}_{0} + \underbrace{\int_{\curvearrowleft} \frac{-1/2 + 1/2\, i}{z+(2+2i)} dz}_{0} = 0$

mivel a $z=-(1+i)$ és a $z=-(2+2i)$ pólusok kívül vannak az általunk használt felső félkörön.

Bázistranszformáció: ①

Standard bázis

$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Egy másik bázis

$v_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = x\cdot e_1 + y\cdot e_2 = \alpha\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} = \alpha v_1 + \beta v_2$$

Tehát ugyanazt a vektort a különböző bázisokban az

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}_e \quad \text{illetve az} \quad \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}_v$$

oszlopvektorokkal is reprezentáltathatjuk.

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}_e = \alpha v_1 + \beta v_2 = \begin{pmatrix}2\alpha + 5\beta\\1\alpha + 3\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{pmatrix}_{e\leftarrow v}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}_v \qquad \text{ahol } \begin{pmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_1 & v_2\end{pmatrix}$$

illetve

$$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}_v = \begin{pmatrix}3 & -5\\-1 & 2\end{pmatrix}_{v\leftarrow e}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}_e, \qquad \text{ahol } \begin{pmatrix}3 & -5\\-1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{pmatrix}^{-1}$$

---

Vegyünk egy lineáris tr.-t: $\varphi: \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}_e \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}_{e\leftarrow e}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix}1x+2y\\3x+4y\end{pmatrix}_e$

Ugyanez a $\varphi$ tr. a $v$ bázisban:

$$\varphi: \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}_v \longrightarrow \underline{\begin{pmatrix}3 & -5\\-1 & 2\end{pmatrix}_{v\leftarrow e}\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}_{e\leftarrow e}}\begin{pmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{pmatrix}_{e\leftarrow v}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}_v$$

összefoglalva:

$w_e$ és $w_v$ legyen ugyanannak a $w$ vektornak a koordinátavektora az $e_1, e_2$, illetve a $v_1, v_2$ bázisban.

Ekkor

$$w_e = S_{e\leftarrow v} w_v \qquad \text{ahol} \qquad S_{e\leftarrow v} = \begin{pmatrix}v_1 & v_2\end{pmatrix}$$

$$w_v = S^{-1}_{v\leftarrow e} w_e \qquad \text{ahol} \qquad S^{-1}_{v\leftarrow e} = (S_{e\leftarrow v})^{-1}$$

A

$$\varphi: w_e \longrightarrow A_{e\leftarrow e} w_e$$

tr. alakja a $v$ bázisban:

$$\varphi: w_v \longrightarrow S^{-1}_{v\leftarrow e} A_{e\leftarrow e} S_{e\leftarrow v} w_v = B_{v\leftarrow v} w_v$$

ahol

$$B_{v\leftarrow v} = S^{-1}_{v\leftarrow e} A_{e\leftarrow e} S_{e\leftarrow v}$$

A bázis transzformációhoz szükséges a $\begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix}$ inverz kiszámítása. Ez sokkal könnyebb, ha az új $n_1, n_2$ bázis ortonormált: ②

$(n_1, n_2) = n_1 \cdot n_2 = 0$, $\quad n_1 \cdot n_1 = 1$, $n_2 \cdot n_2 = 1$ $\quad$ (skalárszorzat)

Ekkor

$$\begin{pmatrix} - n_1^T - \\ - n_2^T - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | \\ n_1 & n_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (-n_1^T-) \begin{pmatrix} | \\ n_2 \\ | \end{pmatrix} = n_1 \cdot n_2 = 0$$

Általánosabban: Legyen $O$ egy ortogonális mátrix, vagyis az oszlopvektorai legyenek egymásra merőlegesek és egységnyi hosszúak. Ekkor

$$O^{-1} = O^T, \quad \text{vagyis } O^T O = O O^T = E$$

Egy vektor kifejtése egy ortogonális $n_1, n_2$ bázisban:

$$V = \alpha n_1 + \beta n_2 \Rightarrow (n_1, V) = (n_1, \alpha n_1 + \beta n_2) = \alpha$$
$$(n_2, V) = (n_2, \alpha n_1 + \beta n_2) = \beta$$

vagyis

$$\underline{V = (n_1, V)\, n_1 + (n_2, V)\, n_2}\ .$$

Komplex vektorok esete.

Ez itt a $V$ vektor 2. komponense

Skalárszorzat: $(U, V) = \sum_i \bar{U}_i V_i = \bar{U}_1 V_1 + \bar{U}_2 V_2 + \dots$

pl. $$\left( \begin{pmatrix} 1+2i \\ 3+4i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5+6i \\ 7+8i \end{pmatrix} \right) = \overline{(1+2i)}(5+6i) + \overline{(3+4i)}(7+8i) =$$
$$= (1-2i)(5+6i) + (3-4i)(7+8i) =$$

$$= \left( \overline{1+2i} \quad \overline{3+4i} \right) \begin{pmatrix} 5+6i \\ 7+8i \end{pmatrix} = (-\bar{U}^T-) \begin{pmatrix} | \\ V \\ | \end{pmatrix}$$

Legyen $n_1, n_2$ egy ortogonális bázis, vagyis

$$(n_1, n_1) = (n_2, n_2) = 1 = (-\bar{n}_2^T-) \begin{pmatrix} | \\ n_2 \\ | \end{pmatrix}, \qquad (n_1, n_2) = (n_2, n_1) = 0$$

Legyen $U = \begin{pmatrix} | & | \\ n_1 & n_2 \\ | & | \end{pmatrix}$, ekkor $U^{-1} = \bar{U}^T = U^*$, hiszen

$$E = \bar{U}^T U = \begin{pmatrix} - \bar{n}_1^T - \\ - \bar{n}_2^T - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | \\ n_1 & n_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Egy $U$ mátrix $U^*$ adjungáltja: $U^* = \bar{U}^T$, vagyis $(U^*)_{ij} = \bar{U}_{ji}$

Valós esetben az adjungált a transzponáltmátrix.

Milyen feltétel esetén biztos, hogy egy A mátrix sajátvektoraiból kiválasztható egy ortonormált bázis? (3)

Tétel: Legyen A önadjungált (a valós esetén szimmetrikus) mátrix. Ekkor létezik olyan ortonormált bázis, hogy annak elemei A sajátvektorai. Továbbá A sajátértékei valósak. (Így ha A valós, akkor a sajátvektorai is választhatóak valósnak.)

Biz.:

(0) önadjungált: $A=A^*$ vagyis $A=\bar{A}^T$, $A_{ij}=\bar{A}_{ji}$

szimmetrikus: $A=A^T$, vagyis $A_{ij}=A_{ji}$

$$(u,Av)=(-\bar{u}^T-)A\begin{pmatrix}|\\v\\|\end{pmatrix}=\left(A^T\begin{pmatrix}|\\\bar{u}\\|\end{pmatrix}\right)^T\begin{pmatrix}|\\v\\|\end{pmatrix}=\left(\overline{\bar{A}^T\begin{pmatrix}|\\u\\|\end{pmatrix}}\right)^T\begin{pmatrix}|\\v\\|\end{pmatrix}=(A^*u,v)$$

pl.:

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&4i\\5&6i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7i\\8\end{pmatrix}\right)=(\bar{1}\ \ \overline{2i})\begin{pmatrix}3&4i\\5&6i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7i\\8\end{pmatrix}=$$

$$=\left(\begin{pmatrix}\bar{3}&\bar{5}\\\overline{4i}&\overline{6i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7i\\8\end{pmatrix}\right)$$

(1) $A=A^*$ $\Rightarrow$ sajátértékek valósak

$$Av=\lambda v \Rightarrow A^*v=\lambda v \Rightarrow (v,Av)=\overbrace{(v,\lambda v)}^{\lambda(v,v)}=(A^*v,v)=(Av,v)=$$

$$=\underbrace{(\lambda v,v)}_{\bar{\lambda}(v,v)} \Rightarrow \lambda=\bar{\lambda}$$

(2) Legyen $Av=\lambda v$, $(u,v)=0$. Ekkor $(Au,v)=0$.

$$(Au,v)=(u,A^*v)=(u,\lambda v)=\lambda(u,v)=0.$$

(3) Ortonormált bázis megkonstruálása:

A-nak biztosan van egy $\lambda_1$ sajátértéke (algeba alaptétele: $\det(A-\lambda E)=0$-nak biztos van gyöke). Így találhatunk hozzá egy egységnyi hosszú $v_1$ sajátvektort. Vegyük az erre merőleges vektorok W halmazát (alterét). Ekkor, ha $w\in W$, akkor $Aw\in W$ ((2) alapján). Ha A-nak a W-n való hatását tekintjük, akkor a egy önadjungált mátrix lesz, egy, az eredetinél eggyel kisebb dimenziós vektortérben, így W-ben megint találhatunk egy sajátvektort. Az eljárást folytatva addig, amíg W nulla dimenziós nem lesz, megkonstruálhatjuk a kívánt bázist.

# Ortogonális sorok.

(4)

⓪ Egy $v$ vektor kifejtése egy $n_1, \ldots n_D$ ortonormált bázisban:

$$v = (n_1, v) n_1 + (n_2, v) n_2 + \ldots + (n_D, v) n_D$$

① Vektortér: $[-\pi, \pi]$-n értelmezett függvények tere.
(ez azonosítható a $2\pi$ periódusú függvenyekkel.)

skalárszorzat: $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$

ortonormált bázis:

$$e_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$(e_n, e_m) = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}} \cdot \frac{e^{imx}}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx =$$

$$= \begin{cases} = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{i(m-n)x}}{i(m-n)} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{i(m-n)} \left( (-1)^{m-n} - (-1)^{m-n} \right) = 0 & \text{ha } m \neq n \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i \cdot 0 \cdot x} dx = 1 & \text{ha } m = n \end{cases}$$

Fourier-tr.

a) $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (e_n, f_n) \cdot e_n(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n \cdot \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$, ahol

$$\hat{f}_n = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx$$

b) valós Fourier-tr.

ortonormált bázis:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}_{C_0(x)}, \quad \underbrace{\frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}}_{C_n(x)}, \quad \underbrace{\frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}}_{S_n(x)}, \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

$$f(x) = (C_0, f) \cdot C_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n, f) \cdot C_n(x) + (S_n, f) \cdot S_n(x)$$

(2) Vektortér: $[-\pi L, \pi L]$-en adott függvények.

skalárszorzat:

$$(f,g) = \int_{-\pi L}^{\pi L} \bar{f}(x)\, g(x)\, dx$$

ortonormált bázis:

$$e_n(x) = \frac{e^{in\frac{x}{L}}}{\sqrt{2\pi L}}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Fourier-tr:

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (e_n, f_n) \cdot e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi L}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n \cdot e^{in\frac{x}{L}}, \quad \text{ahol}$$

$$\hat{f}_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi L}} \int_{-\pi L}^{\pi L} e^{-in\frac{x}{L}} f(x)\, dx$$

---

Fourier-tr. a valós számegyenesen (Fourier integrál)

$$L \to \infty, \quad \frac{n}{L} = p_n, \quad \frac{1}{L} = \Delta x, \quad \tilde{f}(p_n) = \sqrt{L}\, \hat{f}_n.$$

Ekkor

$$\tilde{f}(p_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi L}^{\pi L} e^{-ip_n x} f(x)\, dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi L}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\tilde{f}(p_n)}{\sqrt{L}} \cdot e^{ip_n x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{f}(p_n)\, e^{ip_n x} \cdot \Delta x$$

Ha $L \to \infty$, $\Delta x \to 0$, akkor

$$f(x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(p)\, e^{ipx}\, dx,$$

ahol

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} f(x)\, dx.$$

(Itt $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{f}(p_n)\, e^{ip_n x} \Delta x \approx \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(p)\, e^{ipx} dx$, mivel $p_{n+1} - p_n$ éppen $\Delta x$.)

[Egy másik konvenció a Fourier transzformációra:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(p)\, e^{ipx}\, dx\,;$$

$$\tilde{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} f(x)\, dx$$
]

# Parciális Differential egyenletek (PDE) ⑥

① Laplace operátor

$$\Delta f = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right) f$$

a) Tétel: Minden eltolás és elforgatás invariáns differenciál-operátor $p(\Delta) = a_k \Delta^k + a_{k-1}\Delta^{k-1} + \ldots + a_0$ alakú.
Ezek közül $\Delta$ az egyetlen, amelyre igaz, hogy
$(\Delta f)(\bar{x}_{max}) \leq 0$, ha $f$-nek lokális maximuma van $\bar{x}_{max}$-ban.

b) $\Delta$ hatása radiális függvényeken $f(x_1 \ldots x_n) = f(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}) = f(r)$

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2}(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{-1/2} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{r}$$

$$f'_{x_i} = f'(r)\frac{x_i}{r}, \quad f''_{x_i x_i} = f''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + f'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right)$$

tehát

$$\Delta f(r) = f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) f(r)$$

c) Laplace egyenlet

$$-\Delta u = 0$$

Fundamentális megoldás:

$$\phi(\bar{x}) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \ln|\bar{x}| & n = 2 \\ \dfrac{1}{n(n-2)\mathrm{Vol}(S^n)\ |\bar{x}|^{n-2}} & n \geq 3 \end{cases}$$

itt $\mathrm{Vol}(S^n)$ az egységgömb térfogata

$$-\Delta\phi(\bar{x}) = \delta(\bar{x})$$

Igazoljuk ezt $n=3$-ra radiális $h(\bar{x}) = h(r)$ tesztfüggvényekre!

$$\langle -\Delta\phi, h\rangle = \langle \delta, h\rangle = h(0) = \sum_i \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}\phi, \frac{\partial}{\partial x_i} h\right\rangle = \sum_i \left\langle -\phi, \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} h\right\rangle =$$

$$= \langle -\phi, \Delta h\rangle = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi r} \Delta h(r)\, dV = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi r}\left(h'' + \frac{3-1}{r}h'\right) \cdot \underbrace{4\pi r^2 dr}_{dV}$$

$$= -\int_0^\infty (h'' r + 2h')\, dr = -\int_0^\infty (h' \cdot r + h)'\, dr = -\left[h' r + h\right]_0^\infty =$$

$$= -\left\{ \underbrace{\left(h'(\infty)\cdot\infty + h(\infty)\right)}_{\text{=0 mivel h csak egy véges tartományon nem nulla}} - \left(h'(0)\cdot 0 + h(0)\right)\right\} = h(0). \quad \text{Q.E.D.}$$

(7)

Poisson egyenlet: $\quad -\Delta u = f$

$$u = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\bar{x}-\bar{y}) f(\bar{y})\, d\bar{y}$$

Hőegyenlet:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x)$$

Fundamentális megoldás:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \Phi(x,t) = \delta(x)\,\delta(t) = \delta(x,t)$$

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2t}} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

Ha $t=1$, $\Phi(x,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$: normális eloszlás.

Az $u'_t = \frac{1}{2} u''_{xx}$, $u(0,x) = f(x)$ kezdetiérték probléma megoldása:

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x-y,t) f(y)\, dy$$

Megmaradási törvény:

$$p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)\, dx = \text{konstans}$$

Biz.: $$\frac{dp}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} u'_t\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} u''_{xx}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2} u'_x\right) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2} u'_x(t,x)\right]_{x=-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2}\left(u'_x(t,\infty) - u'_x(t,-\infty)\right) = 0,$$

ha $u$-ra megfelelő határfeltételeket rovunk ki.

Általánosabban:

Ha $-\frac{\partial}{\partial t} u(t,\bar{x}) = \frac{\partial}{\partial x_1} j_1(t,x) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} j_n(t,x)$

(röviden $\frac{\partial}{\partial t} u + \operatorname{div} \bar{j} = 0$),

akkor $$\int_{\mathbb{R}_n} u(t,\bar{x})\, dx_1 \dots dx_n = \text{konstans}.$$

8

Hullámegyenlet

$$u''_{tt} - \Delta u = 0$$

2d:
$$u''_{tt} - u''_{xx} = 0$$

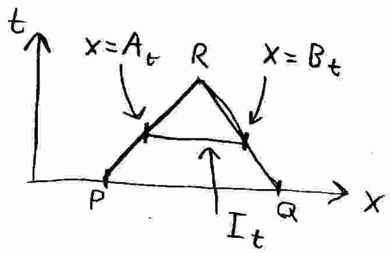
Mivel
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)u$$

így az általános megoldás:
$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t)$$

Energiamegmaradás:
$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(u'_t)^2 + \frac{1}{2}(u'_x)^2\,dx = \text{konstans}$$

Megmaradási egyenlet:
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\left[u_t'^2 + u_x'^2\right]\right) = u''_t \cdot u'_t + u''_{xt} u'_x = u''_{xx} \cdot u'_t + u''_{xt} u'_x$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(u'_x u'_t\right)$$

Véges terjedési sebesség:




$$E_t = \int_{I_t} \frac{1}{2}\left(u_t'^2 + u_x'^2\right)dx$$

PR, QR: $\pm 1$ meredekség

$$\frac{dE_t}{dt} = -\frac{1}{2}\Big(u_t'^2(t,A_t) + u_t'^2(t,B_t) + u_x'^2(t,A_t) + u_x'^2(t,B_t)\Big) + \int_{I_t} \frac{\partial}{\partial x}(u'_x u'_t)\,dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\left(u_t'^2(t,A_t) + u_x'^2(t,A_t)\right) - u'_x(t,A_t)\,u'_t(t,A_t)\right] + \left[A \leftrightarrow B, \text{stb.}\right]$$

$\leq 0$, mivel
$$A:\ -\frac{1}{2}(a^2+b^2) - ab = -\frac{1}{2}(a+b)^2 \leq 0$$
$$B:\ -\frac{1}{2}(a^2+b^2) + ab = -\frac{1}{2}(a-b)^2 \leq 0$$

De $E_t \geq 0$, így $E_t = 0$, ha $E_0 = 0$. Vagyis ha $u(0,x) = 0$ $I_0$-on, akkor $u(t,x) = 0$ az $(A_t, B_t)$ nyílt intervallumon belül. Tehát $u = 0$ a $PQR$ háromszög belsejében.

Hullám- és Hőegyenletek periodikus (vagy $S^1$-en adott) függvényekre. (9)

A továbbiakban a függvények $x$ szerint $2\pi$ periodikusak, $[-\pi,\pi]$-n adottak.

Hőegyenlet:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x), \quad u(0,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n \cdot \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \qquad \text{(Hő)}$$

Véges dimenziós analógia:

$$\frac{d}{dx}\bar{y} = A\bar{y}, \qquad A\bar{v}_i = \lambda_i \bar{v}_i \longrightarrow \bar{y} = \sum_i c_i e^{\lambda_i x}\bar{v}_i$$

$$\text{ha } \bar{y}(0) = \sum_i c_i \bar{v}_i \text{, akkor } \bar{y}(x) = \sum_i c_i e^{\lambda_i x}\bar{v}_i.$$

$-i\frac{\partial}{\partial x}$ saját értékei, saját vektorai.

(1) $-i\frac{\partial}{\partial x}$ önadjungált: $(-if', g) = (f, -ig')$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \overline{\left(-i\frac{\partial}{\partial x}f(x)\right)}\, g(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}g(x)\right)dx$$

(parciális integrálás + periodikusság)

Önadjungáltság $\longrightarrow$ sajátértékek valósak, sajátvektorok merőlegesek egymásra.

$$-i\frac{\partial}{\partial x}v(x) = \lambda v(x) \longrightarrow v(x) = e^{i\lambda x}$$

$$v(-\pi) = v(\pi) \longrightarrow e^{i\lambda(-\pi)} = e^{i\lambda\pi} \longrightarrow \lambda \in \mathbb{Z}$$

sajátérték: $n \in \mathbb{Z}$, normalizált sajátvektor: $v_n = e^{inx}$

(2) $-\frac{1}{2}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ sajátért: $-\frac{1}{2}n^2$, sajátvektor: $v_n = e^{inx}$

Tehát (Hő) partikuláris megoldása:

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n \cdot e^{-\frac{1}{2}n^2 t}\cdot\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{u_n}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}n^2 t + inx\right)$$

Hullám-egyenlet

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} U(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(t,x) \;, \quad U(0,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} U_n \cdot \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \;, \quad U'(0,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{U}_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$$

Keressük $U$-t a következő alakban:

$$U(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(t) \cdot \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$$

Ekkor $\frac{d^2}{dt^2} c_n(t) = c_n(t) \cdot (-n^2)$, $c_n(0) = U_n$, $c_n'(0) = \tilde{U}_n$

Vagyis $c_n(t) = U_n \cdot \cos(nt) + \frac{\tilde{U}_n}{n} \sin(nt)$.

Tehát

$$U(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left( U_n \cos(nt) + \frac{\tilde{U}_n}{n} \sin(nt) \right) \cdot \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} l_n e^{n(x+t)} + r_n e^{n(x-t)} = f(x+t) + g(x-t)$$

$2\pi$ periódikusak