Differencialegyenletek. I. Feladatsor

1. Ismetlo feldatok.
   I.) Szamold ki a kovetkezo fuggvenyek hatarozatlan integraljait!
   $$a)\ x\ln(3x),\qquad b)\ \sin(3x)\sqrt{\cos(3x)},\qquad c)\ \frac{1}{(x-3)x}$$
   II.) Ird fel a kovetkezo fuggvenyek Taylor sorat az $x = x_0$ pont korul!
   $$a)\ e^{3x},\ x_0=0;\qquad b)\ \sin(3x),\ x_0=0;\qquad c)\ \log(x),\ x_0=1;\qquad d)\ \frac{1}{1-x},\ x_0=0;\qquad e)\ \frac{1}{x^2+1},\ x_0=0.$$
   III.) Legyen $f(x)$
   $$a)\ e^{x+y^2},\qquad b)\ x\sin(y^2).$$
   Mennyi $f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}$? Mennyi $\frac{d}{dx}f(x,\ln(x))$?
2. Ird at a kovetkezo DE-ket idofuggetlen DE rendszerre!
   $$a)\ y'=xy^2+x;\qquad b)\ y'=x-y;\qquad c)\ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xy_1+y_2\\y_1y_2+x\end{pmatrix}$$
3. Ird at a kovetkezo egyenleteket elsorende DE rendszerre!
   $$a)\ y''=-y'-2y;\qquad b)\ y'''=y+x;\qquad c)\ \frac{d^2}{dx^2}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1'-y_2\\y_2'y_1\end{pmatrix}$$
4.
   $$a)\ y'=f(x,y)=x-y;\qquad b)\ y'=f(x,y)=y^2+yx;$$
   Mennyi y'' es y''' ? Ird fel y harmadrendu Talor polinomjat az $x=0$ pont korul, ha $y(0)=5$!
5.
   $$a)\ f(x)=\sin x,\ \ x_0=\pi/2;\qquad b)\ f(x)=\sqrt{x},\ \ x_0=9;\qquad c)\ f(x)=1/x,\ \ x_0=2;$$
   Ird fel f-nek a linearis $f(x_0+\Delta x)\approx T_1(x_0+\Delta x)$ kozeliteset, ha $\Delta x = 0.1$! Mennyi $\max_{z\in[x_0,x_0+\Delta x]}|f''(z)|$? Adj felso korlatot a kozelites $|\text{hiba}(\Delta x)| = |f(x_0+\Delta x) - T_1(x_0+\Delta x)|$ hibajara!
6. Alkalmazd az Euler, illetve a Heun modszert a kovetkezo DE-ekre $\Delta x = 0.1$ lepeskozzel az $y(2) = 3$ kezdeti feltetel mellett!
   $$a)\ y'=x-y;\qquad b)\ y'=x-y^2;$$
   Vegezd el ugyanezt az
   $$c)\ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_2\\-y_1\end{pmatrix};\qquad d)\ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1-y_2\\y_1^2+x\end{pmatrix}$$
   egyenletekre az $\begin{pmatrix}y_1(2)\\y_2(2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ kezdeti feltetel mellett!
   Mit josolnak ezek a modszerek y(2.1)-re?
7. Oldd meg a kovetkezo DE-ket az $y(0) = 1$ kezdeti feltetel mellett, vizsgald meg a megoldasok egyertelmuseget, illetve hatarozd meg, hogy milyen intervalumon vannak azok ertelmezve! Magyarazd meg a felmerulo problemakat!
   $$a)\ y'=y,\qquad b)\ y'=y^2,\qquad c)\ y'=y^{1.1},\qquad d)\ y'=\sqrt{y},\qquad e)\ y'=|y|^{0.9},$$
8. Rajzold le az $y' = f(x)$ DE iranymezojet es a megoldasgorbeit!
   $$a)\ y'=1,\qquad b)\ y'=x,\qquad c)\ y'=1-x,\qquad d)\ y'=x^2,\qquad e)\ y'=1-x^2,$$

9. Rajzold le az $y' = f(y)$ DE iranymezojet es a megoldasgorbeit! Keresd meg a DE fixpontjait es ird fel a fixponttol valo elteresre vonatkozo DE linearizalt alakjat! Vizsgald meg a fixpontok stabilitasat!

$$a)\ y' = 1, \quad b)\ y' = y, \quad c)\ y' = -y, \quad d)\ y' = y + 1,$$
$$e)\ y' = 1 - y^2, \quad f)\ y' = y(5 - y), \quad g)\ y' = y(1 - y)(1 + y).$$

10. Keresd mag az A matrix sajatertekeit es sajatvektorait! Keresd meg azt as S hasonlolosagi transzformaciot, ami dagonalizalja A-t, vagyis $D = S^{-1}AS$, ahol D diagonalis! Ird fel a v vektort a sajatvektorok linearis kombinaciojakent! Mennyi $A^{13}v$?

$$a)\ (5) \quad b)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad c)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad d)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad e)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad f)\ \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$g)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad h)\ \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Itt a v vektor erteke:

$$a)\ v = (8); \quad b - f)\ v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad g - h)\ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

11. Oldd meg az elozo feladatban szereplo A matrixokra az

$$\frac{d}{dx}y = Ay, \ \ y(0) = v$$

DE-t! Ird fel az altalanos, illetve a partikuralis megoldast! Vizsgald meg az $y = 0$ fixpont stabilitasat! Mennyi $\exp(xA)$? Ird fel a partikularis megoldast e^{xA} segitsegevel!

12. $y'' = -y$. Ird fel a DE karakterisztikus egyenletet, illetve a DE altalanos megoldasat! Ird at a DE-t egy elsorendu DE-rendszerre es oldd meg az elozo feladathoz hasonloan! Hasonlitsd ossze a ket megoldasi modszert!

13. Keresd mag az A matrix sajatertekeit es sajatvektorait!

$$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad c)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad d)\ \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Mennyi $\exp(xA)$?

14. Oldd meg az elozo feladatban szereplo A matrixokra az

$$\frac{d}{dx}y = Ay, \ \ y(0) = v$$

DE-t! Ird fel a partikularis megoldast e^{xA} segitsegevel, ha a v vektor erteke:

$$a - c)\ v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad d)\ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

15. $y'' = -y - ky'$. Ird fel a DE karakterisztikus egyenletet, es hatarozd meg, hogy milyen k ertek eseten esenk egybe a gyokei! Ird fel a DE altalanos megoldasat!
Ird at a DE-t egy elsorendu renszerre, es vizsgald meg az egyutthatomatrix Jordan dekompoziciojat!

16. $y'' = y - y^3$. Legyen $p = y'$. Mutasd meg, hogy a DE a kovetkezo (Hamilton fele) alakban is felirhato:

$$y' = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad p' = -\frac{\partial H}{\partial y}.$$

Mennyi H ? Mutasd meg, hogy $H' = 0$!

Ird at a DE-t egy elsorendu DE rendszerre, keresd meg annak a fixpontjait, ird fel a fixpontoktol valo elteresre vonatkozo liearizalt DE-ket! Vizsgald meg a fixpontok stabilitasat!

17. $y'' = y - y^3 - y'$. Legyen $p = y'$ Ird at a DE-t egy elsorendu DE rendszerre, keresd meg annak a fixpontjait, ird fel a fixpontoktol valo elteresre vonatkozo liearizalt DE-ket! Vizsgald meg a fixpontok stabilitasat!
Legyen $H = p^2/2 - y^2/2 + y^4/4$. Mutasd meg, hogy $H' \leq 0$! Bizonyitsd be ennek alapjan a fixpontok stabilitasat!