Differencialegyenletek. I. Feladatsor

1. $x_0 = 9$, $x_{n+1} = \phi(x_n) = 5x_n + 8$. Mennyi x_n ?
   ϕ fixpontja: $x_f = 5x_f + 8$, $\Longrightarrow$ $x_f = -2$. Fixpont koruli linearizalt dinamika:
   $$\Delta x_n = x_n - x_f = x - (-2), \qquad \Delta x_{n+1} = 5\Delta x_n,$$
   tehat
   $$x_n = 5^n \cdot (9 - (-2)) + (-2).$$

2. Ird at a kovetkezo DE-ket idofuggetlen DE rendszerre!
   $$a)\ \ y' = xy^2 + x; \qquad b)\ \ y' = x - y; \qquad c)\ \ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy_1 + y_2 \\ y_1 y_2 + x \end{pmatrix}$$
   Megoldas:
   $$a)\ \ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ty^2 + t \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad a)\ \ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - y \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad c)\ \ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ty_1 + y_2 \\ y_1 y_2 + t \\ 1 \end{pmatrix}$$
   ;

3. Ird at a kovetkezo egyenleteket elsorende DE rendszerre!
   $$a)\ \ y'' = -y' - 2y; \qquad b)\ \ y''' = y + x; \qquad c)\ \ \frac{d^2}{dx^2}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1' - y_2 \\ y_2' y_1 \end{pmatrix}$$
   Megoldas:
   $$a)\ \ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -v - 2y \end{pmatrix}; \qquad b)\ \ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y \\ v \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ a \\ y + x \end{pmatrix}; \qquad c)\ \ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ v_1 \\ y_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 - y_2 \\ v_2 \\ v_2 y_1 \end{pmatrix}$$

4.
   $$a)\ \ y' = f(x, y) = x - y; \qquad b)\ \ y' = f(x, y) = y^2 + yx;$$
   Mennyi y'' es y''' ? Ird fel y harmadrendu Talor polinomjat az $x = 0$ pont korul, ha $y(0) = 5$!
   Megoldas:
   $$y'' = \left(\frac{\partial}{\partial x} + f\frac{\partial}{\partial y}\right) f; \qquad y''' = \left(\frac{\partial}{\partial x} + f\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f,$$
   tehat
   $$a)\ \ y'' = -x + y + 1, \quad y''' = x - y - 1,$$
   $$y(0) = 5,\ \ y'(0) = f(0, 5) = 0 - 5,\ \ y''(0) = -0 + 5 + 1 = 6,\ \ y'''(0) = 0 - 5 - 1 = -6,$$
   $$y(x) \approx 5 - 5x + \frac{6}{2!}x^2 + \frac{-6}{3!}x^3$$
   $$b)\ \ y'' = 2xy + 2y^3 + 1, \quad y''' = 2x^2 + 8xy^2 + 6y^4 + 2y,$$
   $$y(0) = 5,\ \ y'(0) = f(0, 5) = 25,\ \ y''(0) = 251,\ \ y'''(0) = 3760,$$
   $$y(x) \approx 5 + 25x + \frac{251}{2!}x^2 + \frac{3760}{3!}x^3$$

5.
   $$a)\ \ f(x) = \sin x,\ \ x_0 = \pi/2; \qquad b)\ \ f(x) = \sqrt{x},\ \ x_0 = 9; \qquad c)\ \ f(x) = 1/x,\ \ x_0 = 2;$$
   Ird fel f-nek a linearis $f(x_0 + \Delta x) \approx T_1(x_0 + \Delta x)$ kozeliteset, ha $\Delta x = 0.1$! Mennyi $\max_{z\in[x_0, x_0+\Delta x]}|f''(z)|$? Adj felso korlatot a kozelites $|\text{hiba}(\Delta x)| = |f(x_0 + \Delta x) - T_1(x_0 + \Delta x)|$ hibajara!

6. Alkalmazd az Euler, illetve a Heun modszert a kovetkezo DE-ekre $\Delta x = 0.1$ lepeskozzel az $y(2) = 3$ kezdeti feltetel mellett!

$$a)\;\; y' = x - y; \qquad b)\;\; y' = x - y^2;$$

Vegezd el ugyanezt az

$$c)\;\; \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix}; \qquad d)\;\; \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ y_1^2 + x \end{pmatrix}$$

egyenletekre az $\begin{pmatrix} y_1(2) \\ y_2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ kezdeti feltetel mellett!

Mit josolnak ezek a modszerek y(2.1)-re?

7. Rajzold le az $y' = f(y)$ DE iranymezojet es a megoldasgorbeit! Keresd meg a DE fixpontjait es ird fel a fixponttol valo elteresre vonatkozo DE linearizalt alakjat! Vizsgald meg a fixpontok stabilitasat!

$$a)\;\; y' = 1, \qquad b)\;\; y' = y, \qquad c)\;\; y' = -y, \qquad d)\;\; y' = y + 1,$$
$$e)\;\; y' = 1 - y^2, \qquad f)\;\; y' = y(5 - y), \qquad g)\;\; y' = y(1 - y)(1 + y).$$

8. Keresd mag az A matrix sajatertekeit es sajatvektorait! Ird fel a v vektort a sajatvektorok linearis kombinaciojakent! Mennyi $A^{13}v$?

$$a)\;\; (5) \qquad b)\;\; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad c)\;\; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad d)\;\; \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad e)\;\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad f)\;\; \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$g)\;\; \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad h)\;\; \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Itt a v vektor erteke:

$$a)\;\; v = (8); \qquad b - f)\;\; v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \qquad g - h)\;\; v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

9. Oldd meg az elozo feladatban szereplo A matrixokra az

$$\frac{d}{dx}y = Ay, \;\; y(0) = v$$

DE-t! Ird fel az altalanos, illetve a partikuralis megoldast! Vizsgald meg az $y = 0$ fixpont stabilitasat! Mennyi $\exp(xA)$? Ird fel a partikularis megoldast e^{xA} segitsegevel!

10. Keresd mag az A matrix sajatertekeit es sajatvektorait!

$$a)\;\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b)\;\; \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad c)\;\; \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad d)\;\; \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Mennyi $\exp(xA)$?

11. Oldd meg az elozo feladatban szereplo A matrixokra az

$$\frac{d}{dx}y = Ay, \;\; y(0) = v$$

DE-t! Ird fel a partikularis megoldast e^{xA} segitsegevel, ha a v vektor erteke:

$$a - c)\;\; v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \qquad d)\;\; v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

12. $y'' = y - y^3$. Legyen $p = y'$. Mutasd meg, hogy a DE a kovetkezo (Hamilton fele) alakban is felirhato:

$$y' = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad p' = -\frac{\partial H}{\partial y}.$$

Mennyi H ? Mutasd meg, hogy $H' = 0$!

Ird at a DE-t egy elsorendu DE rendszerre, keresd meg annak a fixpontjait, ird fel a fixpontoktol valo elteresre vonatkozo liearizalt DE-ket!

13. $y'' = y - y^3 - y'$. Legyen $p = y'$ Ird at a DE-t egy elsorendu DE rendszerre, keresd meg annak a fixpontjait, ird fel a fixpontoktol valo elteresre vonatkozo liearizalt DE-ket!

14.
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - y_1 y_2 \\ -y_2 + 2y_1 y_2 \end{pmatrix}, \qquad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y_1 - 3)(y_2 - 4) \\ (y_1 - 2)(y_2 - 5) \end{pmatrix}$$

Keresd meg a DE-k fixpontjait, ird fel a fixpontoktol valo elteresre vonatkozo liearizalt DE-ket!

15. Ird fel a kovetkezo Lagrange fuggvenyekhez tartozo Euler-Lagrange egyenlet(ek)et!

$$(y')^2 - y^2, \quad y' + 8, \quad (y')^2 + y', \quad L = (y')^4 + (y-1)^2,$$
$$M = \left((y_1')^2 + (y_2')^2\right)/2 - V(y_1, y_2),$$
$$\left((y_1')^2 + (y_2')^2\right)/2 + A_1(y_1, y_2)y_1' + A_2(y_1, y_2)y_2'$$

Megoldas:

L:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2(y-1), \qquad \frac{\partial L}{\partial y'} = 4(y')^3,$$
$$\frac{d}{dx}\left(4(y')^3\right) - 2(y-1) = 0.$$

M:

$$\frac{\partial M}{\partial y_1'} = y_1', \qquad \frac{\partial M}{\partial y_2'} = y_2', \qquad \frac{\partial M}{\partial y_1} = -\frac{\partial V}{\partial y_1}, \qquad \frac{\partial M}{\partial y_2} = -\frac{\partial V}{\partial y_2},$$
$$\frac{d}{dx}y_1' - \left(-\frac{\partial V}{\partial y_1}\right) = 0, \qquad \frac{d}{dx}y_2' - \left(-\frac{\partial V}{\partial y_2}\right) = 0,$$

vagy

$$y_1'' = -\frac{\partial V}{\partial y_1}, \qquad y_2'' = -\frac{\partial V}{\partial y_2}$$

16. Legyen adott az $S[u] = \int_0^1 (y'(x))^4 + xy(x)\,dx$ funkcional a $[0,1]$-en ertelmezett es a vegpontokban eltuno fuggvenyek H teren. Legyen V a $[0,1]$-en ertelmezett, a vegpontokban eltuno es a $[0,1/3]$, $[1/3,2/3]$, $[2/3,1]$ intervallumokon affin folytonos fuggvenyek tere. Legyen ϕ_1 es ϕ_2 ennek e ternek egy bazisa, ahol $\phi_1(1/3) = \phi_2(2/3) = 1$ es $\phi_2(1/3) = \phi_1(2/3) = 0$. Legyen $u_h = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$. Szamitsd ki az $S[u_h] = s(c_1, c_2)$ ketvaltozos fuggvenyt! (Az $xy(x)$-os tag kiszamitasara az integralban hasznalj valamilyen kozelito modszert!)

Megoldas:

ϕ_1 derivaltjanak az erteke a $[0,1/3]$, $[1/3,2/3]$, $[2/3,1]$ intervallumokon: $3, -3, 0$.

ϕ_2 derivaltjanak az erteke a $[0,1/3]$, $[1/3,2/3]$, $[2/3,1]$ intervallumokon: $0, 3, -3$.

Tehat $\int_0^1 (y'(x))^4\,dx = \left((c_1 \cdot 3)^4 + ((c_2 - c_1)\cdot 3))^4 + (c_2 \cdot 3)^4\right) \cdot \frac{1}{3}$.

Az $xy(x)$-es tag hozzajarulasanak kozelito kiszamitasa trapez modszerrel:

$\int_0^1 xy(x)\,dx \approx (0.5(0 \cdot 0 + 1/3 \cdot c_1) + 0.5(1/3 \cdot c_1 + 2/3 \cdot c_2) + 0.5(2/3 \cdot c_2 + 1 \cdot 0)) \cdot \frac{1}{3}$.

$S[u_h] = s(c_1, c_2)$ (kozelitoleg) ezen tagok osszege.