1. (3+2+2+3 pont)

A $\{\sin(nx/2)\,|\,n=1,2,\ldots\}$ fuggvenyek halmaza egy ortogonalis bazisat adja $L^2([0,2\pi])$-nek. Adj meg ebben a terben egy

3 ortonormalt bazist! $\int_0^{2\pi} \sin^2\frac{nx}{2}dx = 2\pi\cdot\frac{1}{2} = \pi$ ortonormált bázis: $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\frac{nx}{2}$

Legyen a 2π szerint periodikus f fuggveny erteke $f(x)=1$, ha $x\in[-2,2]$, maskulonben $f=0$ a $(-\pi,\pi)$ intervallumon. Ha

2 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}_n e^{inx}$, akkor mennyi $\hat{f}(88)$? $\hat{f}(88) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-88ix} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-2}^{2} e^{-88ix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-88ix}}{88i}\right]_{-2}^{2}$

2 $\phi_t(t,x)=\phi_{xx}(t,x)$, $\phi(0,x)=\cos(-3x)+\sin(2x)$. Mennyi $\phi(t,x)$?

$\varphi(t,x) = e^{-9t}\cos(-3x) + e^{-4t}\sin(2x)$

3 $\phi_{tt}(t,x)=\phi_{xx}(t,x)$, $\phi(0,x)=e^{3ix}$, $\phi_t(0,x)=\sin(4x)+1$. Mennyi $\phi(t,x)$?

$\varphi(t,x) = \cos(3t)e^{3ix} + \frac{\sin(4t)}{4}\sin(4x) + t$

2. (2+1+(2+4+1) pont)

2 Legyen $2y''-7y'+8y=e^{i\omega t}$, $y=A(\omega)e^{i\omega t}$. Mennyi $A(\omega)$? $= \frac{1}{-2\omega^2-7i\omega+8}$

1 Legyen $f(x)=-0$, ha $x\in[-4,4]$, maskulonben $f=0$. Ha $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(p)e^{ipx}\,dp$, akkor mennyi $\hat{f}(-0.5)$? $=0$, mivel $f=0$.

Keresd meg a kovetkezo DE megoldasat a ($G(t)=0$, ha $t<0$) feltetel mellett!

$-G''+25G=\delta.$

Add meg a kovetkezo mennyisegeket!

2 $G(0^+)-G(0^-)=0$ $\qquad$ $G'(0^+)-G'(0^-)=-1$

4 Mennyi $G(t)$? $= \begin{cases} \frac{1}{10}e^{-5t} - \frac{1}{10}e^{5t} \\ 0, \quad t<0 \end{cases}$

1 Ird fel az $-y''+25y=f(t)$ DE megoldasat, ha ($y(t)=f(t)=0$, ha $t\ll 0$).

$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau)f(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t}\frac{1}{10}\left(e^{-5(t-\tau)} - e^{5(t-\tau)}\right)f(\tau)d\tau$

3. (2+2+(3+2+1) pont)

2 Szamold ki az $f=H(t-1)H(-t+5)$ fuggveny Laplace transzformaltjat a definicio alapjan!

$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)\,dt = \int_1^5 e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_1^5$ 2

2 Szamold ki az alabbi f,g fuggvenypar $f*g$ konvoluciojat! $f(t)=t$, $g(t)=t$

$(f*g)(t) = \int_0^t (t-\tau)\tau\,d\tau = \left[t\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{3}\right]_0^t = \frac{1}{6}t^3$

Legyen $y''+5y=1-t^2$, $y(0)=2$, $y'(0)=3$. Mennyi $\mathcal{L}(y(t))=Y(s)$? ($\mathcal{L}(t^n)=\frac{n!}{s^{n+1}}$.)

3 $s^2Y(s) - 2s - 3 + 5Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^3}$ $\qquad Y(s) = \frac{1}{s^2+5}\left(\frac{1}{s} - \frac{2}{s^3} + 2s + 3\right)$

2 Irt fel azt, hogy hogyan nez ki $Y(s)$ parcialis tort felbontasa! (Az egyutthatokat nem kell kiszamolni!)

1 Mennyi $y(t)$? $\quad Y(s) = \frac{A}{s+5i} + \frac{B}{s-5i} + \frac{C}{s} + \frac{D}{s^2} + \frac{E}{s^3}$

$y(t) = Ae^{-5it} + Be^{5it} + C + Dt + \frac{E}{2}t^2$

4.(1+2+2+1+3+1 pont)

Legyen

$A^* - A = \begin{pmatrix} 0 & -3-3i \\ -3i+3 & -8i \end{pmatrix}$ $\qquad A=\begin{pmatrix} 2 & 3i \\ -3 & 4i \end{pmatrix}.$

1 Mennyi A^*-A ?

2 Legyen $f_1=(i/\sqrt{2},-i/\sqrt{2})^T$, $f_2=(z,-1/\sqrt{2})^T$ egy ortonormalt bazis. Mennyi z ? $\quad z = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

2 A $v=(2,3)^T$ vektor kifejezheto az f-ek linearis $\alpha f_1+\beta f_2$ kombinaciojakent! Mennyi β ? $= (f_2, v) = -\frac{5}{\sqrt{2}}$

1 Elegitse ki $\phi(t,x)$ a $\partial_{tt}^2\phi-\partial_{tx}^2\phi+8\partial_{xx}^2\phi=0$ egyenletet. Ha $\phi(t,x)=e^{i(\omega t+kx)}$ es $\omega=99$, akkor mennyi lehet k ?

$-\omega^2 - \omega k + 8k^2 = 0 \qquad -99^2 - 99k + 8k^2 = 0 \qquad k_{1,2} = \frac{99 \pm \sqrt{99^2 - 4\cdot 8(-99^2)}}{16}$

Legyen

$$\frac{d}{dt}\bar{y}+\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\bar{y}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \bar{y}(0)=\begin{pmatrix} 55 \\ 66 \end{pmatrix}.$$

Mennyi $\bar{Y}(s)$? (Nem kell elvegezni a matrixok invertalasat!)

$\begin{pmatrix} sY_1(s) - 55 \\ sY_2(s) - 66 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Mennyi $\mathcal{L}(f*g)-\mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$? ($\mathcal{L}$ a Laplace transzformaciot jeloli.)

$=0$

1

$\begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+s & 3 \\ 3 & 2+s \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 55 \\ 66 \end{pmatrix}$

3