

1a. (1+1+1+2 pont)

$$y' = y^3 - 9x.$$

Keresd meg a DE fixpontjait!

Ird fel a fixpontok koruli linearizalt kozelito DE-t!

Ha $y(0) = 0$, mennyi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \qquad \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) =$$

Vazold a DE megoldasgorbeit!

1b. (2+3 pont)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y_2 + 8)(y_1 - 3) \\ (y_2 - 1)y_1 \end{pmatrix}$$

Keresd meg a DE fixpontjat!

Ird fel a fixpont koruli linearizalt kozelito DE-t!

2. (3+4+3 pont)

a)

$$y' = f(x, y) = -y^3 - x;$$

Mennyi y'' ? Ird fel y masodrendu Talor polinomjat az $x = 0$ pont korul, ha $y(0) = 3$!

b) Alkalmazd az Euler, illetve a Heun modszeret a kovetkezo DE-re $\Delta x = 0.1$ lepeskozzel az $y(2) = 3$ kezdeti feltetel mellett!

$$y' = -y^3 - x;$$

Mit josol a ket modszer $y(2.1)$ -re?

Euler:

Heun:

c) Legyen $f(x) = 1/\sqrt{x^3}$, $x_0 = 4$. Ird fel f -nek a linearis $f(x_0 + \Delta x) \approx T_1(x_0 + \Delta x)$ kozeliteset, ha $\Delta x = 0.1$! Mennyi $\max_{z \in [x_0, x_0 + \Delta x]} |f''(z)|$? Adj nemtrivialis felso korlatot a kozelites $|\text{hiba}(\Delta x)| = |f(x_0 + \Delta x) - T_1(x_0 + \Delta x)|$ hibajara!

3. (5+2+3 pont)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y_1 + 3y_2 \\ 3y_1 - 4y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Keresd meg A sajatertekeit es sajatvektorait!

Ird fel a DE altalanos megoldasat!

Szamold ki a DE partikularis megoldasat!

4. (2 + (1 + 2) + 5 pont)

a) $x_0 = 99$, $x_{n+1} = \phi(x_n) = 9x_n + 999$. Mennyi x_n ?

b) Ird fel a kovetkezo Lagrange fuggvenyekhez tartozo Euler-Lagrange egyenlet(ek)et!

$$L = y^2(y') - y^4, \quad M = ((y_1')^2 + (y_2')^2)/2 + y_1'y_1 + y_2'y_1$$

c) Legyen adott az $S[u] = \int_0^1 (y'(x) - 1)^2 + (1 + x^2)y(x) dx$ funkcional a $[0, 1]$ -en ertelmezett es a vegpontokban eltuno fuggvenyek H teren. Legyen V a $[0, 1]$ -en ertelmezett, a vegpontokban eltuno es a $[0, 1/5]$, $[1/5, 3/5]$, $[3/5, 1]$ intervallumokon affin folytonos fuggvenyek tere. Legyen ϕ_1 es ϕ_2 ennek a ternek egy bazisa, ahol $\phi_1(1/5) = \phi_2(3/5) = 1$ es $\phi_2(1/5) = \phi_1(3/5) = 0$. Legyen $u_h = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$. Szamitsd ki az $S[u_h] = s(c_1, c_2)$ ketváltozos fuggvenyt! (Az masodik tag kiszamitasara az integralban hasznalj valamilyen kozelito modszeret es add is meg a modszer nevet!)